

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Matea Šapina

Zagreb, 2012.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Zdravko Virag, dipl. ing.

Student:

Matea Šapina

Zagreb, 2012.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru i kolegama koji su mi uvelike pomogli pri pisanju ovog rada.

Matea Šapina



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

ZAVRŠNI ZADATAK

Studentica: **Matea Šapina**

Mat. br.: 0035162980

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Analiza umjetnog aortnog ventila**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Analysis of an artificial aortic valve**

Opis zadatka:

Srcu ima lijevu i desnu stranu, a na svakoj strani postoji pretkljetka i kljetka. Kontrakcijama srca se održava cirkulacija krvi u dva kruga: plućnoj i sistemske cirkulaciji. U sistemske cirkulaciji se krv, kontrakcijama lijeve kljetke, putem aorte i ostatka arterijskog stabla razvodi do svakog dijela tijela, a putem vena se krv vraća u desnu pretkljetku i uslijed kontrakcija desne kljetke odlazi u plućnu cirkulaciju, koja završava na ulazu u lijevu pretkljetku. Između lijeve kljetke i aorte se nalazi aortni zalistak (aortni ventil) kojemu je zadatak spriječiti povratno strujanje iz aorte u srce, za vrijeme relaksacije srca. U nekim patološkim situacijama (suženja, zadebljanja, propuštanje krvi prema srcu) aortni zalistak je nužno operativnim zahvatom zamijeniti umjetnim aortnim ventilom. U ovom je radu potrebno:

- 1) Opisati funkciju aortnog zalistka, te s njim povezane bolesti.
- 2) Dati pregled umjetnih aortnih ventila s opisom prednosti i nedostataka pojedinih izvedbi.
- 3) Definirati matematički model strujanja krvi kroz model umjetnog aortnog ventila s kuglicom u kavezu, pri čemu za model rada srca koristiti model s vremenski promjenjivom elastičnošću, a za model arterijskog stabla koristiti tro-elementni model komore s viskoelastičnom stjenkom.
- 4) Razviti računalni program za rješavanje postavljenog matematičkog modela te izvršiti analizu utjecaja parametra sustava na rad umjetnog aortnog ventila.

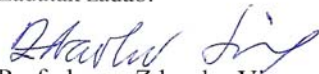
U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:
14. studenog 2011.

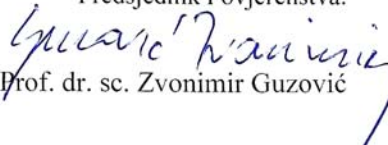
Rok predaje rada:
1. rok: 10. veljače 2012.
2. rok: 6. srpnja 2012.
3. rok: 14. rujna 2012.

Predviđeni datumi obrane:
1. rok: 15., 16. i 17. veljače 2012.
2. rok: 9., 10. i 11. srpnja 2012.
3. rok: 19., 20. i 21. rujna 2012.

Zadatak zadao:


Prof. dr. sc. Zdravko Virag

Predsjednik Povjerenstva:


Prof. dr. sc. Zvonimir Guzović

SADRŽAJ

SADRŽAJ	III
POPIS SLIKA	IV
POPIS TABLICA	V
POPIS OZNAKA	VI
SAŽETAK	1
1. UVOD	2
1.1. Krvožilni sustav	2
2. AORTNI ZALISTAK	4
2.1. Funkcija aortnog zalistka	4
2.2. Struktura aortnog zalistka	5
2.3. Bolesti aortnog zalistka	6
2.4. Umjetni aortni zalisci	8
2.4.1. Mehanički aortni zalistak s kuglicom u kavezu	9
4. ANALIZA UTJECAJA PARAMETARA SUSTAVA NA RAD UMJETNOG AORTNOG ZALISTKA	16
4.1. Rezultati analize utjecaja zadanih parametara	17
5. ZAKLJUČAK	28
LITERATURA	29
PRILOG:	30

POPIS SLIKA

Slika 1.	Krvožilni sustav	2
Slika 2.	Aortni zalistak: a) anatomske položaj; b) trolisna struktura.....	4
Slika 3.	Tlačni val u lijevoj klijetci	4
Slika 4.	Troslojna struktura listića aortnog zalistka	5
Slika 5.	Suženje aortnog zalistka.....	6
Slika 6.	Biološki aortni zalistak.....	8
Slika 7.	Različite vrste protetskih mehaničkih zalistaka: a) kuglica u kavezu, b) jednolističasti nagibni, c) dvolističasti.....	8
Slika 8.	Izvedbe mehaničkog aortnog zalistka s kuglicom u kavezu.....	9
Slika 9.	Prestrujavanje krvi iz lijeve klijetke u sistemske arterije	10
Slika 10.	Geometrija pomicanja kuglice	12
Slika 11.	Dijagram za tlak, brzinu i volumen u lijevoj klijetci	18
Slika 12.	Dijagram za tlak, brzinu i volumen u sistemskim arterijama	18
Slika 13.	Dijagram promjene brzine kuglice i puta.....	19
Slika 14.	Dijagram za tlak, brzinu i volumen u svim taktovima.....	19
Slika 15.	Promjena tlaka pri variranju promjera kuglice	22
Slika 16.	Detalji promjene tlaka pri variranju promjera kuglice.....	22
Slika 17.	Promjena brzine strujanja krvi pri variranju promjera kuglice.....	23
Slika 18.	Detalji promjene brzine strujanja krvi pri variranju promjera kuglice.....	23
Slika 19.	Promjena brzine kuglice pri variranju promjera kuglice	24
Slika 20.	Detalji promjene brzine kuglice pri variranju promjera kuglice	24
Slika 21.	Promjena tlaka pri variranju duljine puta.....	25
Slika 22.	Detalji promjene tlaka pri variranju duljine puta.....	25
Slika 23.	Promjena brzine strujanja krvi pri variranju duljine puta.....	26
Slika 24.	Detalji promjene brzine strujanja krvi pri variranju duljine puta	26
Slika 25.	Promjena brzine kuglice pri variranju duljine puta	27
Slika 26.	Detalji promjene brzine kuglice pri variranju duljine puta.....	27

POPIS TABLICA

Tabela 1. Pregled vrijednosti variranih parametra i broj simulacije.....	16
Tabela 2. Očitane vrijednosti iz dijagrama	17
Tabela 3. Relativna promjena sistoličkog tlaka $\Delta p_{\text{sys}} = (p_{\text{sys}} - p_{\text{sys}}^0) / p_{\text{sys}}^0 \cdot 100\%$ u funkciji promjene parametara sustava. P1 = promjer kuglice, P2 = duljina puta.....	19
Tabela 4. Relativna promjena dijastoličkog tlaka $\Delta p_{\text{dia}} = (p_{\text{dia}} - p_{\text{dia}}^0) / p_{\text{dia}}^0 \cdot 100\%$ u funkciji promjene parametara sustava. P1 = promjer kuglice, P2 = duljina puta.....	20
Tabela 5. Relativna promjena udarnog volumena $\Delta V_{\text{ud}} = (V_{\text{ud}} - V_{\text{ud}}^0) / V_{\text{ud}}^0 \cdot 100\%$ u funkciji promjene parametara sustava. P1 = promjer kuglice, P2 = duljina puta.....	21

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$A_o = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$	cm ²	Površina presjeka otvorenog aortnog zalistka
A_{aorte}	cm ²	Površina poprečog presjeka aorte
a	cm ²	Udaljenost središta kuglice od aortnog otvora
α	rad	Kut koji zatvara kuglica s otvorom aorte u zatvorenom položaju
β	rad	Kut koji zatvara kuglica s otvorom aorte u otvorenom položaju
d	mm	Promjer otvora aortnog zalistka
D	mm	Promjer kuglice
E_1	$\frac{\text{Pa}}{\text{m}^3}$	Elastičnosti stijenke lijeve klijetke
E_2	$\frac{\text{Pa}}{\text{m}^3}$	Elastičnosti stijenke sistemskih arterija
K		Koeficijent lokalnih gubitaka
λ	kg	Pridružena masa (za kuglicu polovina mase istisnine)
m	kg	Masa kuglice
M	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^4}$	Koeficijent inercije
μ	Pas	Dinamička viskoznost
η	$\frac{\text{Pas}}{\text{m}^3}$	Koeficijent viskoznosti stijenke sistemskih arterija
p_1	mmHg	Tlak u lijevoj klijetci
p_2	mmHg	Tlak u aorti
Q	$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	Protok kroz aortni zalistak
r	m	Polumjer otvora aortnog zalistka
R	$\frac{\text{Pas}}{\text{m}^3}$	Otpor kapilara
ρ	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Gustoća krvi i kuglice
s	mm	pomak kuglice - s_{max}
t	s	vremenska koordinata
$v_A = \frac{Q}{A}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Brzina krvi kroz aortni otvor
v_K	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Brzina kuglice

V_1	ml	Volumen krvi u lijevoj klijetci
$V_{0,1}$	ml	Ravnotežni volumen (pri tlaku $p_1 = 0$)
V_2	ml	Volumen krvi u aorti
$V_{0,2}$	ml	Ravnotežni volumen (pri tlaku $p_2 = 0$)

SAŽETAK

Analiza umjetnog aortnog ventila

U ovom radu matematički je modeliran rad umjetnog aortnog zalistka s kuglicom u kavezu. U matematičkom modelu je uzet u razmatranje: lijeva klijetka, aortni zalistak, sistemske arterije i kapilare. Definiran je model s koncentriranim parametrima u kojem su komore (lijeva klijetka i sistemske arterije) karakterizirane tlakom i volumenom, a protok je definiran kroz aortni zalistak i kapilare. Protok kroz umjetni aortni zalistak je definiran nestacionarnom modificiranom Bernoullijevom jednadžbom, u kojoj se uzima u obzir vremenski promjenjivi otvor aortnog zalistka (zavisno o položaju kuglice), a u jednadžbi gibanja kuglice se uzimaju u obzir sila tlaka, sila trenja, te inercijske sile, uključujući i hidrodinamičku reakciju (kroz pridruženu masu). U programskom paketu Matlab je razvijen odgovarajući numerički postupak za rješavanje postavljenog problema. Analizan je utjecaj promjene promjera i maksimalno mogućeg pomaka kuglice na kliničke parametre (sistolički i dijastolički tlak, te udarni volumen), te maksimalne brzine kuglice i brzine strujanja krvi kroz otvor aortnog zalistka. Zaključeno je da se povećanjem promjera kuglice smanjuju sistolički i dijastolički tlak, kao i brzina strujanja krvi kroz otvor aortnog zalistka, te brzina kuglice, dok se povećavanjem duljine puta smanjuju sistolički i dijastolički tlak, kao i brzina strujanja krvi, dok se brzina kuglice povećava.

SUMMARY

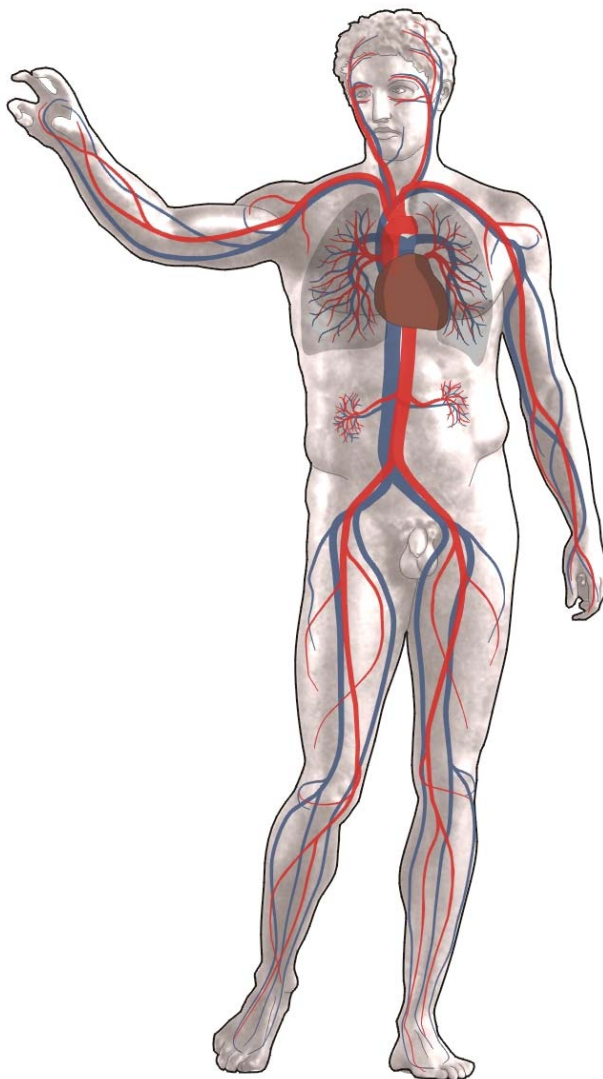
Analysis of the artificial aortic valve

This paper presents mathematically modelled work of the artificial aortic valve with ball in cage. In this mathematical model we give consideration to: left ventricle, aortic valve, systematic arteries and capillaries. Model with concentrated parameters is defined in which chambers (left ventricle and systematic arteries) are characterised with pressure and volume, while flow is defined through aortic valve and capillaries. The flow through artificial aortic valve is defined by nonstationary modified Bernoulli's equation, which takes into consideration time interchangeable opening of aortic valve (depending on the position of the ball), while motion equation of the ball takes into consideration pressure force, friction force and inertial forces, also including hydrodynamic reaction (through associated mass). Program package Matlab has developed matching numerical procedure for resolving the set problem. Impact of changing diameter and maximal possible shift of the ball on the clinical parameters (systolic and diastolic pressure, and volume stroke), as well as maximum speed of the ball and speed of the blood flow through aortic valve is analysed. It is concluded that with increasing the diameter of the ball systolic and diastolic pressure as well as the speed of the blood flow and the speed of the ball decreases, while increasing the length of the course systolic and diastolic pressure and the speed of the blood flow decreases while the speed of the ball increases.

1. UVOD

1.1. Krvožilni sustav

Krvožilni sustav je sustav organa koji prenosi tvari u stanice i iz stanica. Funkcija krvožilnog sustava je dostava krvi svim stanicama, a sama krv prenosi plinove, hormone, hranjive tvari, te otpadne produkte metabolizma.



Slika 1. Krvožilni sustav

Glavni dijelovi krvožilnog sustava su: srce, krv i krvne žile.

Srce je šuplji mišićni organ izgrađen od srčanog mišića, čije tkivo izgrađuje miokard koje je izvana obloženo tankom fibroznom membranom (perikard), dok je iznutra obloženo slojem endotelnih stanica koje čine unutrašnjost, (endokard). Perikard se sastoji od vanjskog i unutarnjeg dijela, a između ovih slojeva se nalazi tanki sloj tekućine koji omogućuje miokardu da se pomiče iako je vezan za tijelo. Srce u tijelu predstavlja sustav od dvije serijski spojene pumpe u kojemu jedna pumpa pumpa krv u vensku, dok druga pumpa pumpa krv u sistemsku cirkulaciju. Te dvije pumpe su podijeljene zidom (septumom) na lijevu i desnu, te svaka strana ima pojačivačku pumpu. Dakle, unutar srca se nalaze četiri komore, gdje razlikujemo pretkljetke (atrium) i kljetke (ventriculus). Kako bi bio omogućen jednosmjerni protok krvi, između pretkljetki i kljetki, te kljetki i aorte i plućne arterije nalaze se zi.

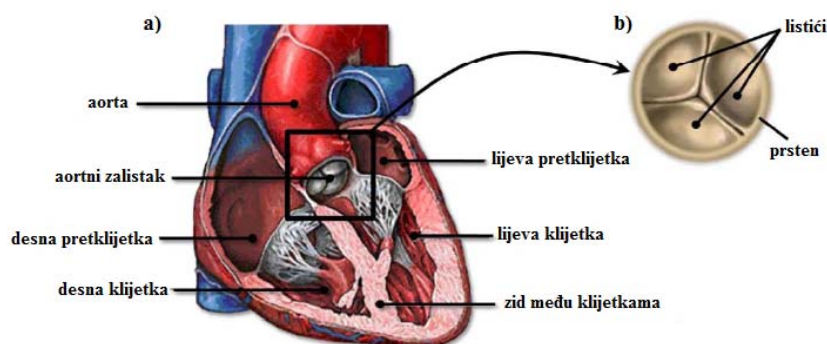
Krv (sanguis) je crvena, gusta, neprozirna tekućina slanog okusa i posebnog mirisa koja protječe srcem i krvnim žilama. Sastoji se od krvne plazme i krvnih stanica. Krvna plazma je blijeda tekućina sastavljena od vode i u vodi otopljenih organskih i anorganskih tvari. Krvne stanice čine eritrociti, leukociti i trombociti.

Krvne žile su žile u čovjekovom organizmu kojima protječe krv od srca prema stanicama, i od stanica prema srcu. Tri su glavne vrste krvnih žila, a to su arterije, vene i kapilare. Arterije prenose krv bogatu kisikom od srca stanicama, dok vene prenose krv bogatu ugljičnim dioksidom od stanica srcu. Kapilare su krvne žile koje omogućuju izmjenu kisika i ugljikovog dioksida, te hranjivih i otpadnih tvari.

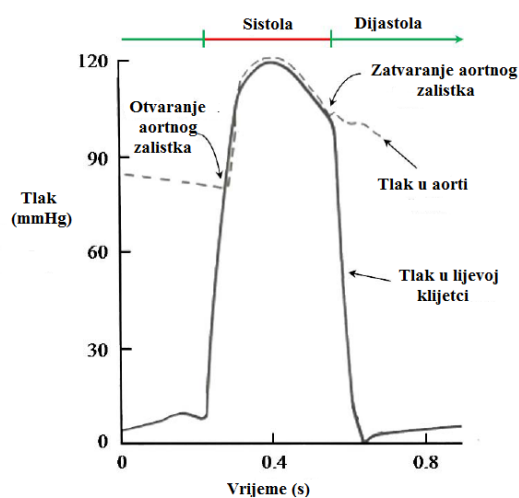
2. AORTNI ZALISTAK

2.1. Funkcija aortnog zalistka

Aortni zalistak je jedan od četiri srčana zalistka i nalazi se između lijeve klijetke i aorte. Sastoji se od tri polumjesečasta listića koja su pričvršćena prstenom izgrađenom od tvrdog vlaknastog tkiva. Prsten omogućuje potporu i održava sopstven oblik zalistka. Trolisna struktura se otvara tijekom srčane sistole (kontrakcije srca) i zatvara tijekom dijastole (relaksacije srca). Za vrijeme sistole, tlak u lijevoj klijetci raste iznad tlaka u aorti, te se aortni zalistak otvara, omogućujući krvi da iz klijetke prijeđe u aortu. Na početku dijastole transvalvularni tlak brzo opada, omogućuje zatvaranje aortnog zalistka i spriječava povratak krvi iz aorte u lijevu klijetku. Ova funkcionalnost je ključna za postizanje jednosmjernog protoka krvi. Listići se otvaraju i zatvaraju oko 103 000 puta dnevno.



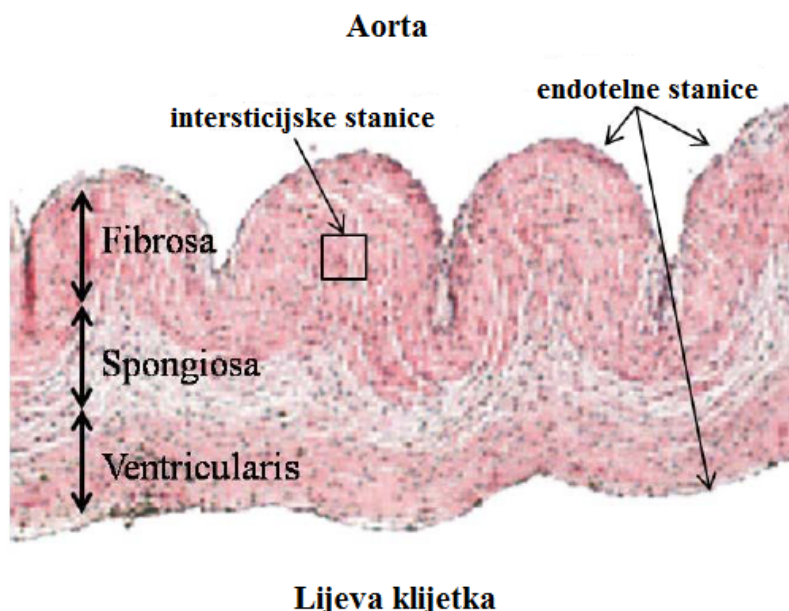
Slika 2. Aortni zalistak: a) anatomski položaj; b) trolisna struktura



Slika 3. Tlačni val u lijevoj klijetci

2.2. Struktura aortnog zalistka

Listići aortnog zalistka su građeni od tri sloja različitog vezivnog tkiva: fibroze koji je sa strane aorte, ventrikularisa sa strane lijeve klijetke i spongioze koja je smještena između ova dva sloja.



Slika 4. Troslojna struktura listića aortnog zalistka

Fibrozu karakterizira valovita površina i građena je od kolagenih vlakana poredanih i posloženih u koncentrične krugove. Orijentacija kolagenih vlakana rezultira strukturom koja je znatno kruća u obodnom smjeru u odnosu na radijalni. Ova anizotropija postoji kako bi se smanjila naprezanja do kojih dolazi uslijed savijanja, te kako bi bilo moguće brzo otvaranje listića, a regulira ih sklop vlakana izgrađenih od oba tipa kolagena: tipa I i V. Duga kolagenska vlakna su građena uglavnom od prolina, hidroksiprolina i glicina, povezanih u usku trostruku spiralnu strukturu. Takva građa omogućuje kolagenu visoku vlačnu čvrstoću, te je kolagen glavna gradivna jedinica vezivnih tkiva.

Elastin je, u odnosu na kolagen, puno fleksibilniji. Zbog hidrofobne isprepletene mreže proteina koji se sastoje uglavnom od alanina, valina, leucina i glicina, molekule elastina mogu kliziti jedna preko druge ili se rastegnuti kako bi održale strukturnu cjelovitost zalistka tijekom sistole klijetke ili omogućile trzaj.

Ventrikularis je glatki dio listića koji je orijentiran prema klijetci građen od radijalno posloženih elastičnih vlakana koja su isprepletena kolagenim vlaknima. Takva struktura omogućuje ventrikularisu veću istezljivost nego što je ima fibroza.

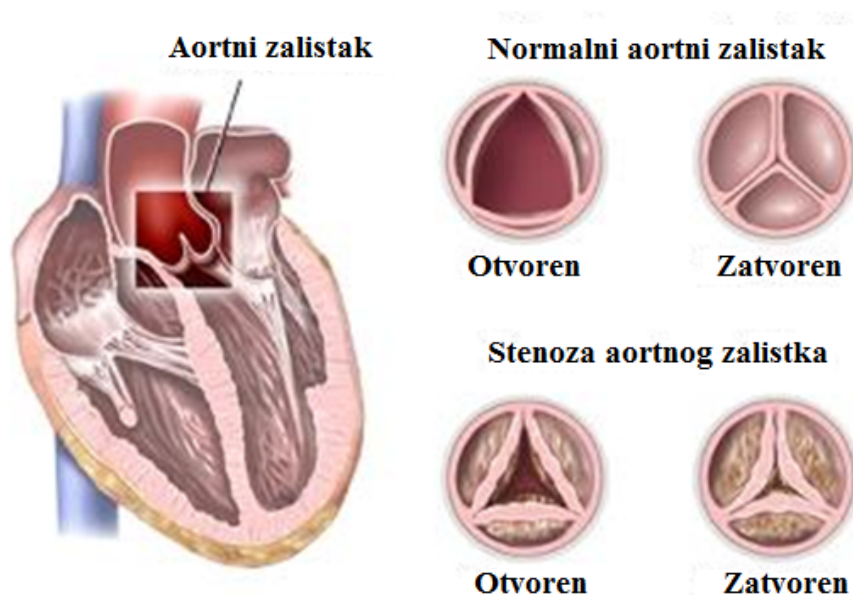
Za razliku od fibroze i ventikularisa, spongioza se sastoji od vodenastog vezivnog tkiva sastavljenom uglavnom od glukozaminglikana koji djeluje kao sloj za podmazivanje.

Izvanstanična matrica aortnog zalistka sastoji se od dvije glavne komponente: kolagena i elastina. Listići aortnog zalistka su građeni od kolagena tipa I, III i V. Kolagen tip I je najprisutniji kolagen u ljudskom organizmu, te je prisutan u građi tkiva ožiljaka, tetiva, kože, stijenki arterija, kostiju, zubiju... Kolagen tip III je glavni sastojak reti vlakana koja se nalaze u rastezljivom vezivnom tkivu koje gradi kožu, pluća, krvožilni sustav, te često se nalazi u tkivima u kojima se nalazi kolagen tipa I. Kolagen tip V je prisutan na površinama stanica i regulira postojanost heterogenih vlakana sastavljenih od oba tipa kolagena: tipa I i tipa V.

2.3. Bolesti aortnog zalistka

Bolesti aortnog zalistka mogu se podijeliti u dvije skupine: suženja (stenoze) i propuštanja (regurgitacije).

Aortno suženje je naziv za bolest aortnog zalistka gdje je otvor između lijeve klijetke i aorte sužen, što uzrokuje neoptimalan protok krvi. Listići aortnog zalistka su kruti i zadebljali, pa im je potpuno otvaranje onemogućeno. Smanjenje otvora uzrokuje proticanje krvi većom brzinom, te povećanje tlaka na stijenke aortnog zalistka. U lijevoj klijetci se povećavaju naprezanja tijekom sistole, što može dovesti do zatajenja srca. Kada se brzina protoka kroz suženu aortu poveća 3-4 puta, potreban je operativni zahvat. Brzina strujanja krvi, protok i drugi potrebni parametri mogu se jednostavno odrediti color dopplerom, tako da je sama dijagnostika samog aortnog suženja razvijena i jednostavna za primijeniti.



Slika 5. Suženje aortnog zalistka

Aortno propuštanje je naziv za bolest aortnog zalistka gdje se zalistak ne zatvara pravilno, tako da se krv iz aorte vraća u lijevu klijetku. Zalisci se ne zatvaraju pravilno jer usljed arteroskleroze dolazi do promjene u strukturi listića aortnog zalistka, te postaju grubi i neelastični, što uzrokuje nemogućnost potpunog priljubljivanja listića, te zbog velike razlike tlakova između lijeve klijetke i aorte dolazi do propuštanja krvi iz aorte u lijevu klijetku.

U oba slučaja dolazi do opterećenja srčanog mišića koji vremenom, oslabi. Slabo srce dovodi do gušenja pri naporu i u miru, poremećaja ritma i ubrzanog propadanja srca i cjelokupnog organizma. Najčešći urođeni poremećaj aortnog zalistka je bikuspidni aortni zalistak, (aortni zalistak ne sastoji od tri listića, nego samo od dva), što uzrokuje nepotpuno otvaranje ili zatvaranje aortnog zalistka. Najčešći uzrok bolesti aortnog zalistka je senilna aortna kalcifikacija, što znači da je se zalistak istrošio tijekom godina uzrokujući odlaganje kalcija (kalcij ograničava pokretljivost listića zalistka), što dovodi do težeg otvaranja (stenoza) ili zatvaranja (regurgitacija) zalistka. Rjeđi uzroci bolesti aortnog zalistka su bolesti aorte, kao što su aneurizma ascedentne aorte, disekcija aorte ili Marfanov sindrom.

Bolesti aortnog zalistka kirurški se liječe rekonstrukcijom zalistka ili ugradnjom umjetnog zalistka.

2.4. Umjetni aortni zalisci

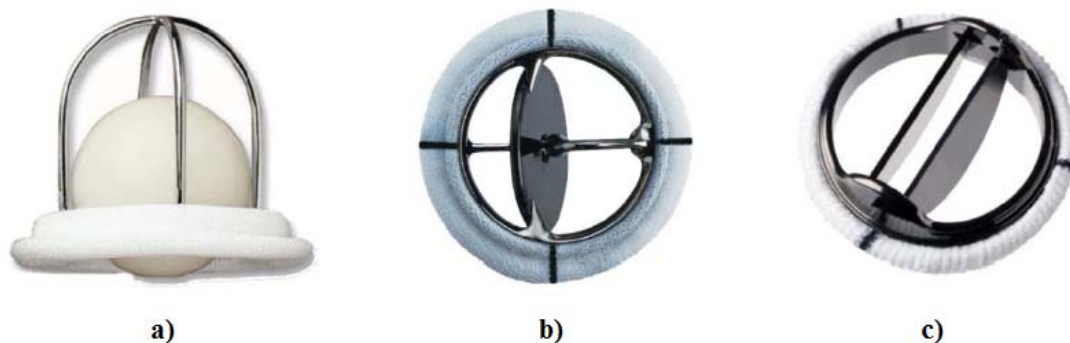
Osnovna podjela umjetnih aortnih zalistaka je podjela na biološki i mehanički aortni zalistak.

Biološki aortni zalistak je umjetni zalistak koji se izrađuje od ljudskog ili životinjskog tkiva. Ksenograftni zalisci su umjetni zalisci napravljeni iz životinjskog tkiva, najčešće od svinjskih aortnih zalistaka, iako se u posljednje vrijeme izrađuju i od kravljeg tkiva. Homograftni zalisci su dobiveni iz srca umrlih osoba. Imaju veću otpornost na infekcije i nije potrebno uzimanje antikoagulacijske terapije. Plućni autograft je plućni zalistak koji se premješta na mjesto aortnog zalistka. Biološki zalisci imaju znatno manju sklonost stvaranju ugrušaka, ali i manju trajnost.



Slika 6. Biološki aortni zalistak

Mehanički aortni zalistak je umjetni zalistak izrađen od metala, plastike ili pirolitičkog ugljika. Glavna prednost mehaničkih zalistaka je njihova visoka trajnost i izdržljivost, dok je glavni nedostatak sklonost stvaranju ugrušaka na svim mehaničkim zaliscima, pa stoga bolesnici s mehaničkim zaliscima moraju doživotno uzimati antikoagulentnu terapiju (razrjeđivače krvi).

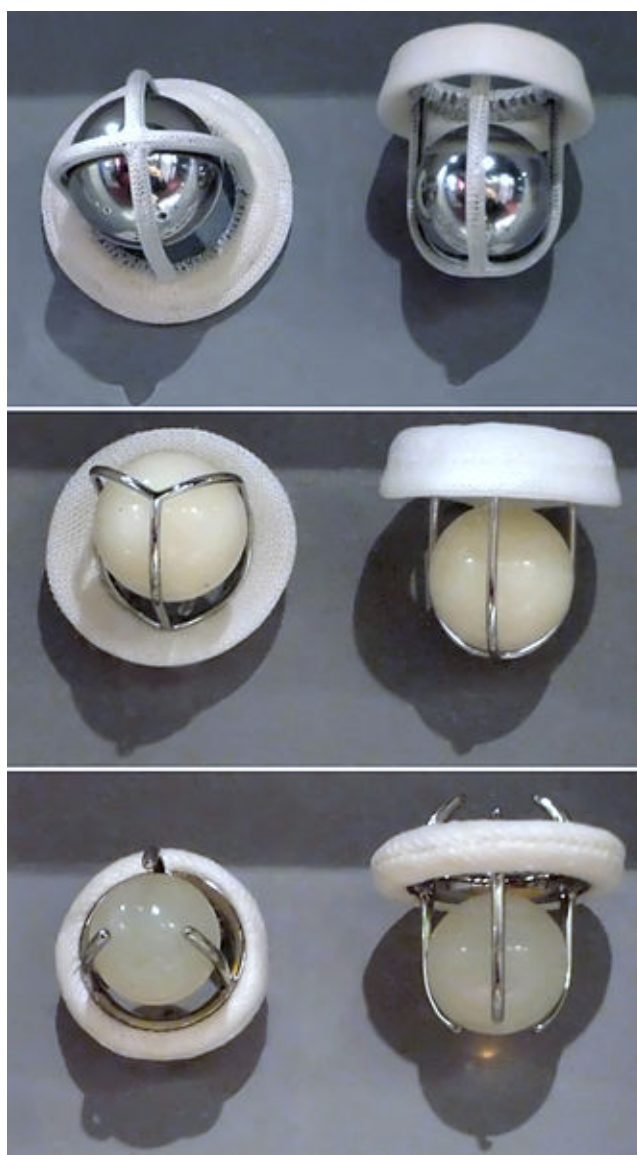


Slika 7. Različite vrste protetskih mehaničkih zalistaka: a) kuglica u kavezu, b) jednolističasti nagibni, c) dvolističasti

Za daljni rad smo odabrali model umjetnog mehaničkog aortnog zalistka s kuglicom u kavezu.

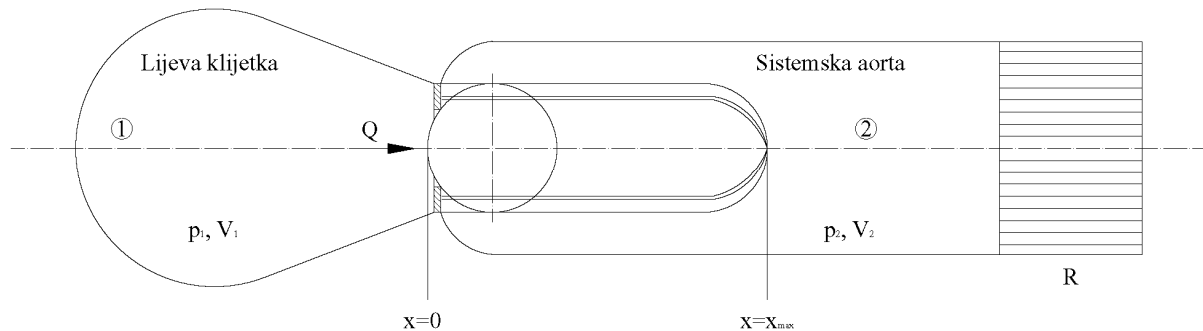
2.4.1. Mehanički aortni zalistak s kuglicom u kavezu

Prvi umjetni aortni zalistak je bio mehanički zalistak s kuglicom u kavezu, koji je izveden tako da se sastoji od kućišta u obliku metalnog kaveza i silikonske kuglice. Kada tlak u klijetci poraste iznad tlaka u aorti, kuglica se pomiče u kavezu i omogućuje protok krvi. Na završetku srčane kontrakcije, tlak u klijetci pada na vrijednost manju od tlaka u aorti, tako da se kuglica pomiče natrag u bazu ventila, te omogućuje brtvljenje, a samim tim i nemogućnost protoka krvi.



Slika 8. Izvedbe mehaničkog aortnog zalistka s kuglicom u kavezu

3. MATEMATIČKI MODEL STRUJANJA KRVI KROZ UMJETNI AORTNI ZALISTAK



Slika 9. Prestrujavanje krvi iz lijeve klijetke u sistemsk arterije

Na slici je prikazana lijeva klijetka koja ima pripadajući tlak p_1 i pripadajući volumen V_1 , koji su nastali prestrujavanjem krvi iz lijeve pretklijetke kroz mitralni zalistak u lijevu klijetku, pri čemu je aortni zalistak bio zatvoren. Punjenjem lijeve klijetke dolazi do porasta volumena krvi u klijetci što dovodi do povećanja tlaka. Kada tlak u lijevoj klijetci postane veći od tlaka u aorti, dolazi do otvaranja aortnog zalistka i prestrujavanja krvi. Ciklus ponavljanja kod zdravog čovjeka iznosi 100 000 pumpanja u danu.

Čimbenici koji utječu na protok krvi su: protok krvi, krvni tlak i periferni otpor (žilni otpor).

Kako bismo opisali funkcioniranje umjetnog aortnog zalistka s kuglicom u kavezu, potreban nam je matematički model strujanja.

$$\frac{dV_1}{dt} = -Q \quad (1)$$

Brzina promjene volumena u lijevoj klijetci, prilikom kontrakcije klijetke i istiskivanja krvi kroz aortni zalistak u aortu, predstavlja negativni protok. Za vrijeme dijastole, dolazi do punjenja lijeve klijetke iz pretklijetke. S obzirom da se u ovom modelu ne analizira predklijetka, a da se klijetka treba do kraja takta napuniti na početni volumen, ovdje je do punjenje modelirano pravcem, pri čemu se od trenutka $t=0,6T$ (T je trajanje jednog otkucaja) volumen klijetke linearno povećava do početnog volumena, neposredno prije početka sistole.

$$p_1 = E_1(t) \cdot (V_1 - V_{1,0}) \quad (2)$$

Gdje je p_1 Tlak u lijevoj klijetci $V_{1,0}$ ravnotežni volumen, pri kojem je $p_1=0$, a odgovara tlaku u elastičnoj stijenci koju opisuje jednadžba. $E_1(t)$ predstavlja vremenski promjenjivu elastičnost lijeve klijetke, dok je V_1 volumen klijetke u određenom vremenskom trenutku. Elastičnost $E_1(t)$ se modelira prema [3] u obliku

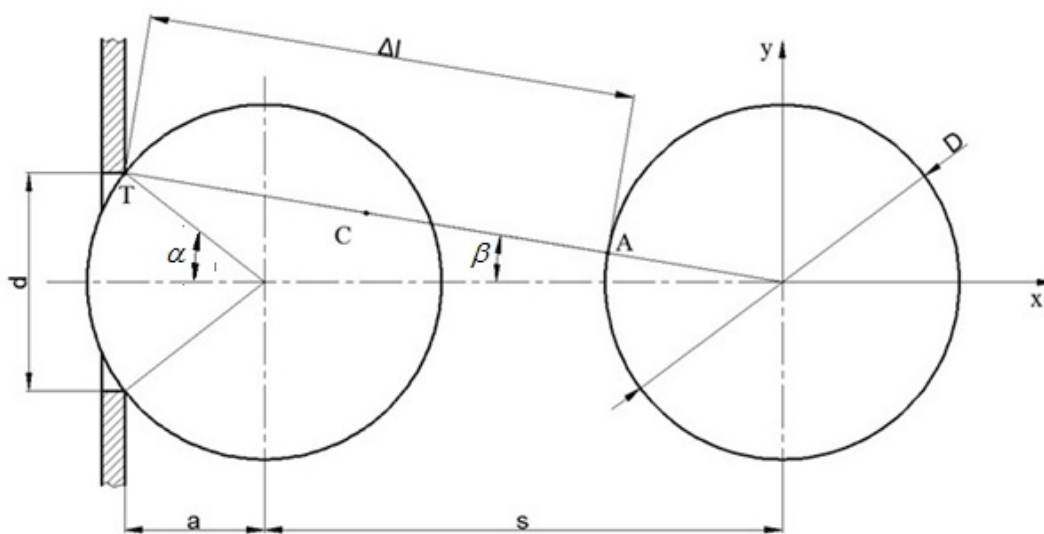
$$E_1(t) = E_{1\min} + fE_{1\max},$$

gdje su $E_{1\min}$ i $E_{1\max}$ minimalna i maksimalna elastičnost, a vremenski promjenjiva funkcija f je definirana izrazom:

$$\left\{ \alpha \cdot \left[\frac{t}{\alpha_1 \cdot T} \right] \right\} f = \left\{ \alpha \cdot \left[\frac{\left(\frac{t}{\alpha_1 \cdot T} \right)^{n_1}}{1 + \left(\frac{t}{\alpha_1 \cdot T} \right)^{n_1}} \right] \cdot \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\alpha_2 \cdot T} \right)^{n_2}} \right] \right\}.$$

$$M \frac{dQ}{dt} = p_1 - p_2 + \frac{\rho \cdot K}{2} \cdot v_A^2 + M \cdot v_A \cdot \frac{dA}{dt} \quad (3)$$

Postavljamo modificiranu Bernoulijevu jednadžbu za opisivanje protoka kroz aortni zalistak, gdje M predstavlja koeficijent inercije, koji se ovdje smatra konstantnim, a procjenjuje se prema formuli $M = \frac{\rho \cdot l}{A_0}$, gdje je l duljina stupca fluida koji se ubrzava kroz aortni zalistak (približno jednaka promjeru aortnog otvora), dok je K koeficijent lokalnog gubitka (ovdje je $K=1$).



Slika 10. Geometrija pomikanja kuglice

Površina otvora je funkcija pomaka kuglice: $A = A(s)$, a definirana je kao manja vrijednost između A_0 i površine plašta konusa kojeg čini spojnica TA prema gornjoj slici. Uzimajući oznake sa slike vrijedi:

Površina otvorenog aortnog zalistka se mijenja u ovisnosti o putu a definirana je kao manja vrijednost između Ao i površine plašta konusa kojeg čini spojnica TA prema gornjoj slici. Uzimajući oznake sa slike vrijedi:

$$\sin \alpha = \frac{d}{D}.$$

Kut koji dodirna točka zatvara sa središtem kuglice jednak je promjeru otvora podijeljenom s promjerom kuglice, pa je udaljenost središta kuglice od ravnine otvora u zatvorenom položaju jednaka:

$$a = \frac{D}{2} \cdot \cos \alpha.$$

Jednadžba kružnice u koordinatnom sustavu s ishodištem u središtu kuglice je

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

a koordinate točke T u tom koordinatnom sustavu je

$$T\left[-(s+a), \frac{d}{2}\right] = (x_T, y_T).$$

Koordinate točke A (presjecište kružnice i spojnice središta kuglice i točke T) je

$$A \left[-\frac{D}{2} \cdot \cos \beta, \frac{D}{2} \cdot \sin \beta \right] = (x_A, y_A),$$

gdje je kut beta definiran izrazom $\operatorname{tg} \beta = \frac{d}{2 \cdot (s+a)}$.

Duljina Δl spojnice TA je: $\Delta l = \sqrt{(x_A - x_T)^2 + (y_A - y_T)^2}$,

a r koordinata središta spojnice je $r = y_C = \frac{y_T + y_A}{2}$,

pa je površina plašta koju opisuje spojnica TA oko simetrale jednaka [4]: $A_p = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \Delta l$,
odnosno $A_p = (y_T + y_A) \cdot \pi \cdot \sqrt{(x_A - x_T)^2 + (y_A - y_T)^2}$.

Veličina površine A kroz koju struji krv jednaka je manjoj od vrijednosti A_o i A_p . Derivacija te površine po vremenu se računa iz sljedećih izraza:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{ds} \cdot \frac{ds}{dt},$$

gdje je brzina kuglice

$$\frac{ds}{dt} = v_K, \quad (4)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{ds} \cdot v_K \quad ; \text{ ako je } A = \frac{d^2 \pi}{4}, \quad \frac{dA}{dt} = 0,$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\partial A}{\partial y_A} \cdot \frac{dy_A}{ds} + \frac{\partial A}{\partial x_A} \cdot \frac{dx_A}{ds} + \frac{\partial A}{\partial x_T} \cdot \frac{dx_T}{ds},$$

$$\frac{\partial A}{\partial y_A} = \pi \cdot \Delta l + (y_T + y_A) \cdot \pi \cdot \frac{y_A - y_T}{\Delta l},$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_A} = (y_T + y_A) \pi \cdot \frac{x_A - x_T}{\Delta l},$$

$$\frac{dy_A}{ds} = -\frac{D}{2} \cos \beta \cdot \frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \beta)^2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{(s+a)^2},$$

$$\frac{dx_A}{ds} = -\frac{D}{2} \sin \beta \cdot \frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \beta)^2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{(s+a)^2},$$

$$\frac{dA}{dx_T} = (y_T - y_A) \pi \cdot \frac{x_T - x_A}{\Delta l},$$

$$\frac{dx_T}{ds} = -1.$$

Jednadžba gibanja kuglice u kojoj se uzimaju inercijske sile, sila uslijed razlike tlaka i sila trenja glasi

$$(m + \lambda) \cdot \frac{dv_K}{dt} = (p_1 - p_2) \cdot \frac{D^2 \pi}{4} + 3\pi \cdot D \cdot \mu \cdot \left(v_K - \frac{Q}{A_{aorte}} \right), \quad (5)$$

pri čemu za jednadžbe (4) i (5) vrijede ograničenja:

$$\text{ako je } s = 0 \text{ (kuglica zatvorena) i } \frac{dv_K}{dt} < 0 \rightarrow v_K = 0; \frac{dv_K}{dt} = 0,$$

$$\text{ako je } s = s_{\max} \text{ (kuglica u krajnjem položaju) i } \frac{dv_K}{dt} > 0 \rightarrow v_K = 0; \frac{dv_K}{dt} = 0.$$

Brzina promjena volumena unutar sistemskih arterija određena je razlikom protoka koji ulazi u komoru i protoka koji izlazi iz iste:

$$\frac{dV_2}{dt} = Q - \frac{p_2}{R}. \quad (6)$$

Ovdje je protok kroz kapilare (izlazni protok) modeliran s p_2/R , čime je implicitno pretpostavljeno da je tlak u sistemskim venama približno jednak nuli. Uz pretpostavku viskoelastičnih stijenki sistemskih arterija, vrijedi:

$$p_2 = E_2 \cdot (V_2 - V_{2,0}) - \eta \cdot \frac{dV_2}{dt}, \quad (7)$$

gdje je $E_2 \cdot (V_2 - V_{02})$ opisuje elastični dio, dok je viskozni dio $\eta \cdot \frac{dV_2}{dt}$.

Nepoznanice koje se pojavljuju u danih 7 jednadžbi su volumeni u obje komore: V_1 i V_2 , pripadajući tlakovi: p_1 i p_2 , protok Q kroz aortni zalistak, pomak s i brzina kuglice v_K . Jednadžbe označuju sustav običnih diferencijalnih jednadžbi, prvog reda, koje se mogu efikasno integrirati nekom od numeričkih metoda. Ovdje se koristi metoda Runge-Kutta četvrtog reda točnosti. Problem se rješava kao problem početnih vrijednosti (u početnom trenutku se trebaju zadati vrijednosti svih varijabli). S obzirom da ne znamo točne vrijednosti svih varijabli u početnom trenutku, one će se proizvoljno pretpostaviti, te će se jednadžbe integrirati kroz više taktova, dok se protoci kroz aortni zalistak i kapilare ne izjednače, tj. dok se ne izgubi utjecaj proizvoljno odabranih početnih uvjeta.

Za početni trenutak se uzima početak sistole (početak kontrakcije klijetke) ju kojem je aortni zalistak zatvoren ($s=0$, $v_k = 0$, $Q=0$), klijetka je na maksimalnom volumenu (ovdje se zadaje $V_1(0)=120\text{ml}$), iz čega se može izračunati tlak p_1 . Volumen V_2 i posljedično tlak p_2 , bi trebalo zadati tako da volumeni krvi koji proteku kroz aortni zalistak i kapilare budu jednaki. Kao što je rečeno oni će se ovdje pretpostaviti, te će se jednačbe integrirati tako dugo dok se utjecaj te pretpostavke ne izgubi. Pokazalo se da je dovoljno integrirati kroz 10 taktova, a svi rezultati koji će biti prikazani se odnose na zadnji (deseti takt). Slika 14 prikazuje promjenu tlaka p_2 kroz 10 taktova. Očito je da su se oscilacije tlaka ustalile već nakon petog takta.

Na osnovu danog matematičkog modela napravljen je program u MATLABu (vidjeti prilog) koji integrira matematički model i ispisuje rezultate u datoteke za crtanje.

4. ANALIZA UTJECAJA PARAMETARA SUSTAVA NA RAD UMJETNOG AORTNOG ZALISTKA

Kako bi se mogao analizirati rad umjetnog aortnog zalistka moramo mijenjati parametre i vidjeti kako oni utječu na sistolički p_{sys} i dijastolički tlak p_{dia} u sistemskim arterijama, te udarni volumen u lijevoj klijetci. Promjer kuglice D i duljina maksimalnog puta kuglice s_{max} se mijenjaju tako da se uzmu tri vrijednosti promjera kuglice i duljine puta kuglice, što nam omogućava devet kombinacija iz kojih očitavamo potrebne podatke za sistolički i dijastolički tlak, te udarni volumen. Vrijednosti promjene parametara iznose po 0.2mm. Uzimajući u obzir da je promjer otvorenog aortnog zalistka 2mm, promjer kuglice mora biti veći od promjera samog otvora, pa prva vrijednost koju uzimamo je 26mm. Vrijednost početne duljine puta koju prelazi kuglica iznosi 16mm.

Tabela 1. Pregled vrijednosti variranih parametara i broj simulacije

Broj simulacije	Vrijednosti parametara	
	Promjer kuglice D	Duljina puta s_{max}
1	2.6e-2	16e-3
2	2.8e-2	16e-3
3	3e-2	16e-3
4	2.6e-2	18e-3
5	2.8e-2	18e-3
6	3e-2	18e-3
7	2.6e-2	20e-3
8	2.8e-2	20e-3
9	3e-2	20e-3

4.1. Rezultati analize utjecaja zadanih parametara

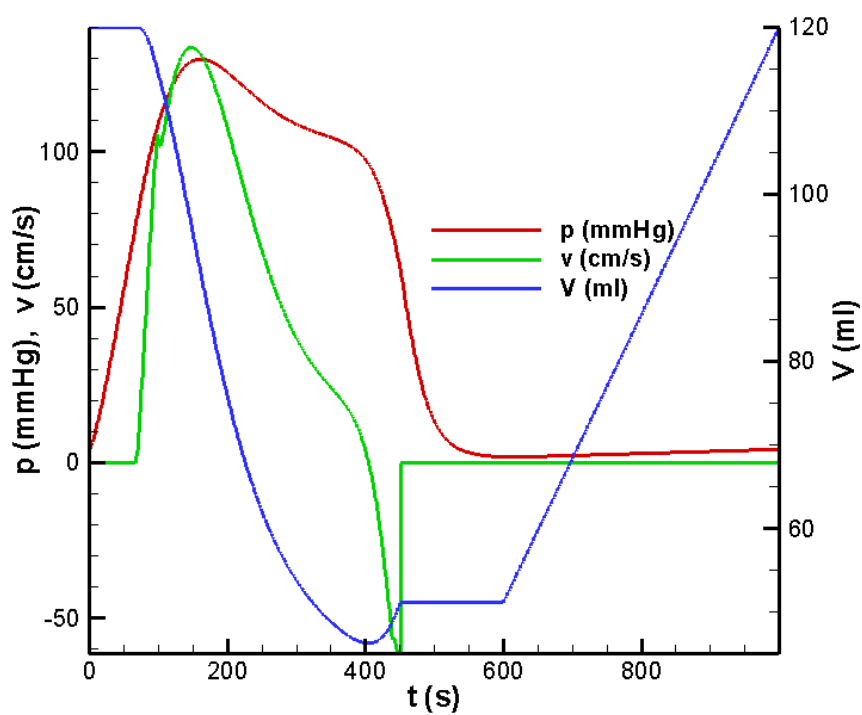
Očitani podatci iz dobivenih dijagrama od svih devet simulacija pokazuju kako nema velikih promjena u sistoličkom p_{sys} i dijastoličkom p_{dia} tlaku, dok se udarni volumen, što predstavlja volumen krvi koji se istisne iz lijeve klijetke tijekom jedne srčane kontrakcije, V_{ud} razlikuje nešto više.

Uspoređujući dobivene rezultate sa vrijednostima sistoličkog i dijastoličkog tlaka, te udarnog volumena kod čovjeka u mirovanju, što za sistolički tlak iznosi 120mmHg, dok za dijastolički tlak iznosi 80mmHg, te za udarni volumen koji kod čovjeka u mirovanju iznosi 70–80ml, možemo zaključiti koja simulacija je u zadanim vrijednostima odgovarajuća i samim tim pogodna za implantiranje u čovjeka.

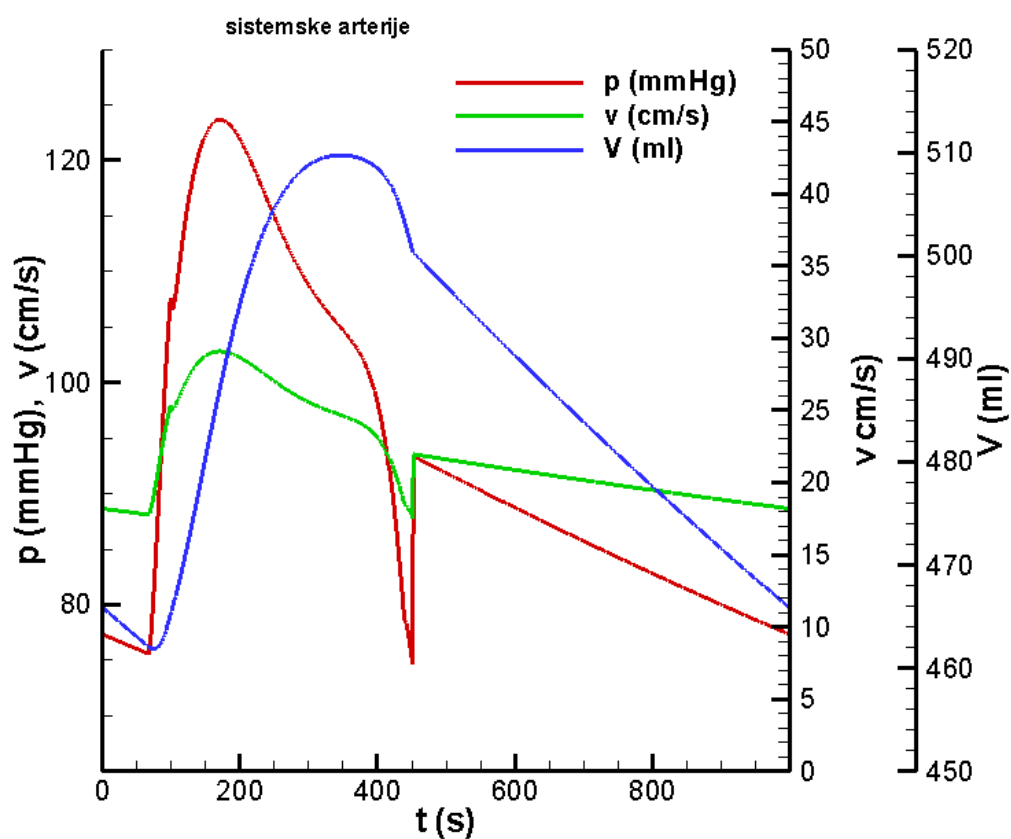
Tabela 2. Očitane vrijednosti iz dijagrama

Broj simulacije	Očitane vrijednosti		
	Maksimalni tlak u sistemskim arterijama (p_{sys} [mmHg])	Minimalni tlak u sistemskim arterijama (p_{dia} [mmHg])	Udarni volumen - V_{ud} , razlika maksimalnog i minimalnog volumena lijeve klijetke [ml]
1	124.5	78	73
2	124	76.5	73.5
3	123.5	75.5	73
4	124	76	74
5	123.5	74	73.5
6	123	72	72.5
7	123	74	73
8	124	75	73
9	123.5	76	74

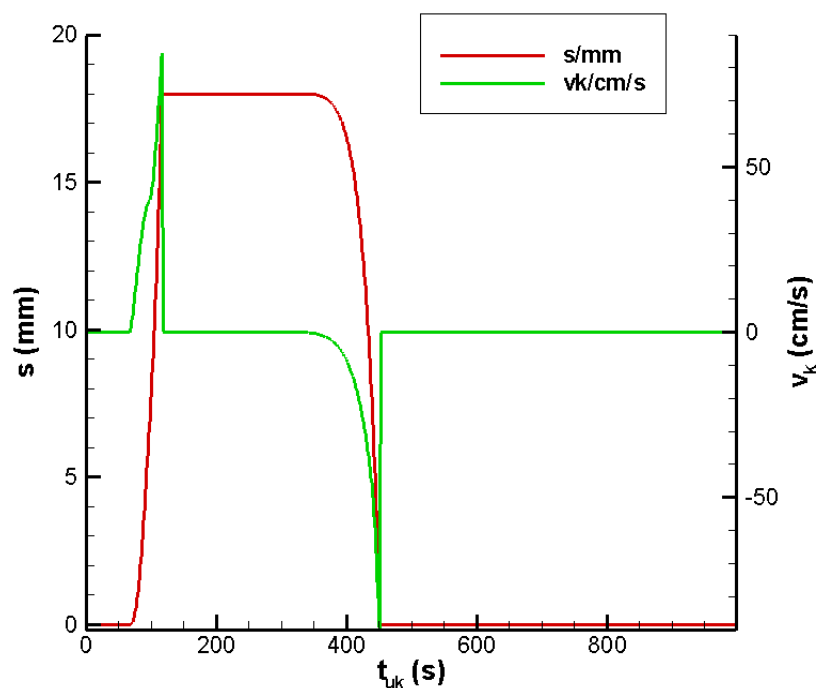
Prema dobivenim podacima, odgovarajuća simulacija je simulacija broj 5, kada je vrijednost promjera kuglice $D = 28\text{mm}$, te duljina puta $s_{max} = 18\text{mm}$.



Slika 11. Dijagram za tlak, brzinu i volumen u lijevoj klijetci

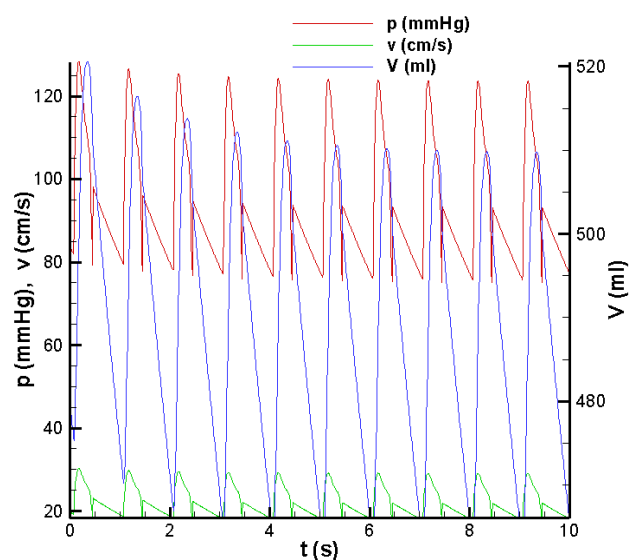


Slika 12. Dijagram za tlak, brzinu i volumen u sistemskim arterijama



Slika 13. Dijagram promjene brzine kuglice i puta

U petoj simulaciji vidimo kako je odstupanje dobivenih vrijednosti od zadanih vrijednosti dovoljno dobro, te radimo daljnju analizu odstupanja vrijednosti iz ostalih simulacija sa petom simulacijom.



Slika 14. Dijagram za tlak, brzinu i volumen u sistemskim arterijama u svim taktovima

U dijagramu za tlak, brzinu i volumen za sve taktove vidimo da se promjena vrijednosti ustabiljuje nakon 5. takta.

Tabela 3. Relativna promjena sistoličkog tlaka $\Delta p_{\text{sys}} = (p_{\text{sys}} - p_{\text{sys}}^0) / p_{\text{sys}}^0 \cdot 100\%$ u funkciji promjene parametara sustava. P1 = promjer kuglice, P2 = duljina puta.

P ₂	16	18	20
P ₁			
2,6	$\Delta p_{\text{sys}} = 0.8\%$	$\Delta p_{\text{sys}} = 0.4\%$	$\Delta p_{\text{sys}} = 0.4\%$
2,8	$\Delta p_{\text{sys}} = 0.4\%$	$p_{\text{sys}}^0 = 123.5 \text{ mmHg}$	$\Delta p_{\text{sys}} = 0.4\%$
3	$\Delta p_{\text{sys}} = 0\%$	$\Delta p_{\text{sys}} = 0.4\%$	$\Delta p_{\text{sys}} = 0\%$

Za vrijednost promjera kuglice $D = 26\text{mm}$ i duljine puta $s_{\text{max}} = 16\text{mm}$, razlika sistoličkog tlaka u odnosu na vrijednost promjera kuglice $D = 28\text{mm}$ i duljine puta $s_{\text{max}} = 18\text{mm}$ iznosi 0.8%, dok se povećavanjem kuglice smanjuje ta razlika. Za vrijednost duljine puta $s_{\text{max}} = 18\text{mm}$, promjenom veličine promjera kuglice se ne mijenja znatno odstupanje koje iznosi 0.4%. Za vrijednost duljine puta koja iznosi $s_{\text{max}} = 20\text{mm}$, znatnim povećanjem kuglice ostvarujemo jednaka očitavanja sistoličkog tlaka kao u petoj simulaciji.

Tabela 4. Relativna promjena dijastoličkog tlaka $\Delta p_{\text{dia}} = (p_{\text{dia}} - p_{\text{dia}}^0) / p_{\text{dia}}^0 \cdot 100\%$ u funkciji promjene parametara sustava. P1 = promjer kuglice, P2 = duljina puta.

P ₂	16	18	20
P ₁			
2,6	$\Delta p_{\text{dia}} = 5.4\%$	$\Delta p_{\text{dia}} = 2.7\%$	$\Delta p_{\text{dia}} = 0\%$
2,8	$\Delta p_{\text{dia}} = 3.37\%$	$p_{\text{dia}}^0 = 74 \text{ mmHg}$	$\Delta p_{\text{dia}} = 1.35\%$
3	$\Delta p_{\text{dia}} = 3.02\%$	$\Delta p_{\text{dia}} = 2.7\%$	$\Delta p_{\text{dia}} = 2.7\%$

Za vrijednost promjera kuglice $D = 26\text{mm}$ i duljine puta $s_{\text{max}} = 16\text{mm}$, razlika dijastoličkog tlaka u odnosu na vrijednost promjera kuglice $D = 28\text{mm}$ i duljine puta $s_{\text{max}} = 18\text{mm}$ iznosi 5.4 %, dok sama razlika opada povećanjem kuglice. Za vrijednost duljine puta $s_{\text{max}} = 18\text{mm}$,

povećanjem i smanjenjem kuglice ostvaruje se jednaka razlika dijastoličkog tlaka, koja iznosi 2.7%. Za vrijednost duljine puta $s_{\max} = 20\text{mm}$, povećanjem kuglice se ostvaruje veća razlika dijastoličkog tlaka, koji za vrijednost promjera kuglice $D = 28\text{mm}$ iznosi 1.35%. dok za vrijednost promjera kuglice $D = 30\text{mm}$ iznosi 2.7%.

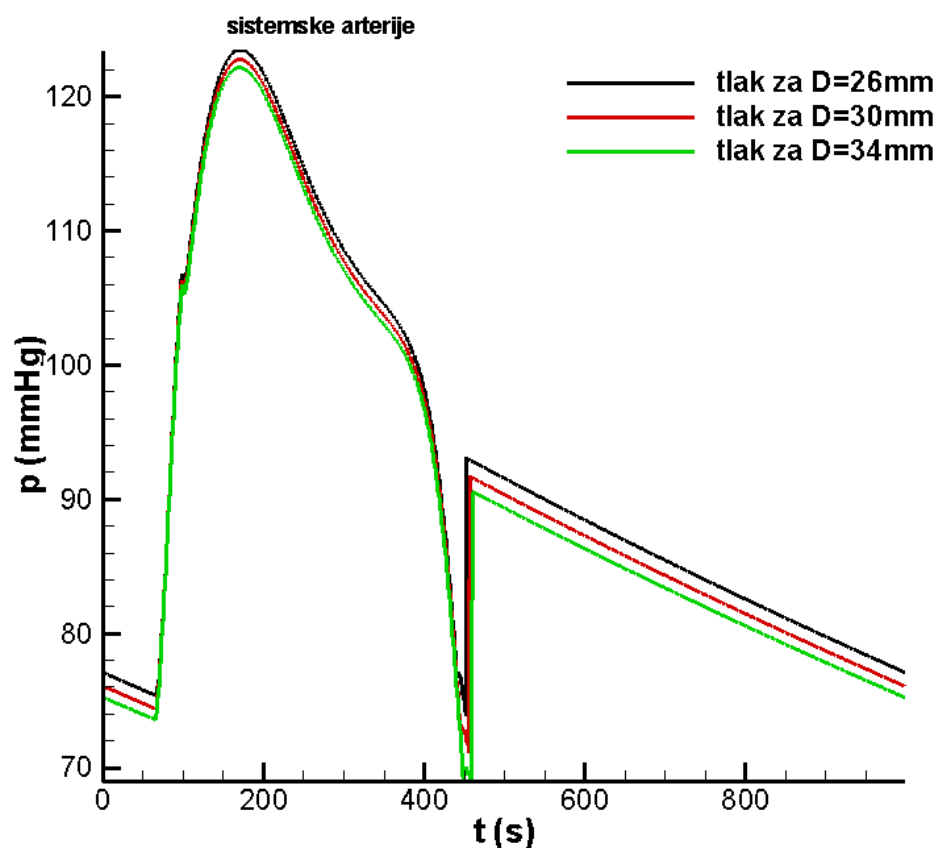
Tabela 5. Relativna promjena udarnog volumena $\Delta V_{\text{ud}} = (V_{\text{ud}} - V_{\text{ud}}^0) / V_{\text{ud}}^0 \cdot 100\%$ u funkciji promjene parametara sustava. P1 = promjer kuglice, P2 = duljina puta.

P ₂	16	18	20
P ₁			
26	$\Delta V_{\text{ud}} = 0.68\%$	$\Delta V_{\text{ud}} = 0.68\%$	$\Delta V_{\text{ud}} = 0.68\%$
28	$\Delta V_{\text{ud}} = 0\%$	$V_{\text{ud}}^0 = 73.5 \text{ ml}$	$\Delta V_{\text{ud}} = 0.68\%$
30	$\Delta V_{\text{ud}} = 0.68\%$	$\Delta V_{\text{ud}} = 1.36\%$	$\Delta V_{\text{ud}} = 0.68\%$

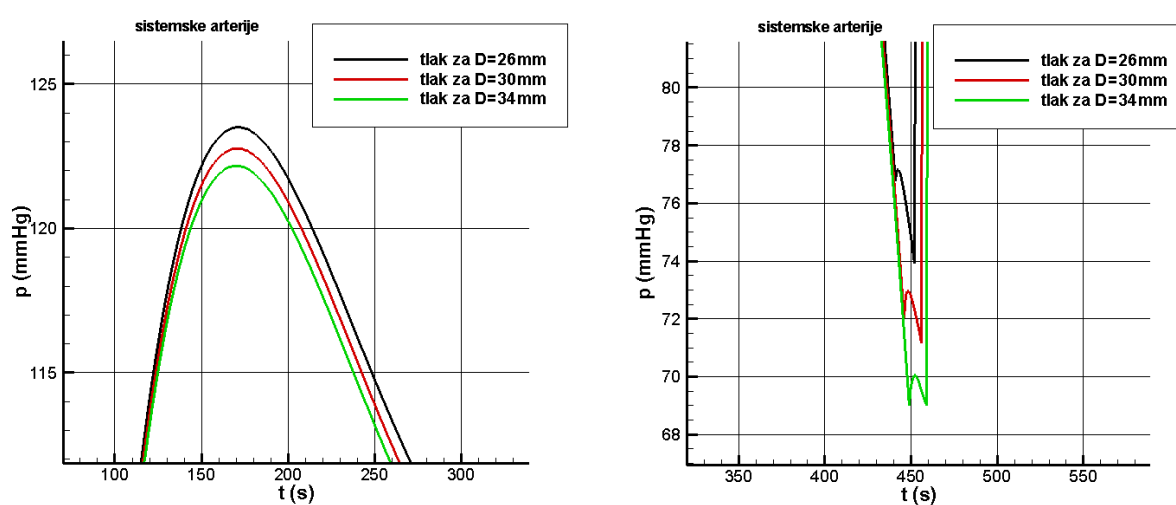
Za vrijednost promjera kuglice $D = 28\text{mm}$ i duljine puta $s_{\max} = 16\text{mm}$, razlika udarnog volumena od vrijednosti dobivene u petoj simulaciji iznosi 0%, dok se smanjenjem, kao i povećanjem kuglice ta vrijednost povećava na 0.68%. Za vrijednost duljine puta $s_{\max} = 18\text{mm}$, kuglica promjera $D = 26\text{mm}$ uzrokuje promjenu u vrijednostima dobivenog udarnog volumena za 0.68%, dok kuglica promjera $D = 30\text{mm}$ uzrokuje promjenu od 1.36%. Za duljinu puta koja iznosi $s_{\max} = 20\text{mm}$, veličina kuglice ne utječe na promjenu udarnog volumena i u odnosu na petu simulaciju se razlikuje za 0.68%.

S obzirom da nema velike promjene u vrijednostima sistoličkog i dijastoličkog tlaka, brzine kuglice u danih 9 simulacija, dat ćemo prikaz za brzinu kuglice, brzinu strujanja krvi unutar aorte i promjenu tlakova parametre ćemo mijenjati za veće vrijednosti i dati prikaz u dijagramima.

Najprije mijenjamo vrijednosti promjera kuglice za vrijednost 4mm, dok duljinu puta ostavljamo konstantnu i iznosi 20mm.

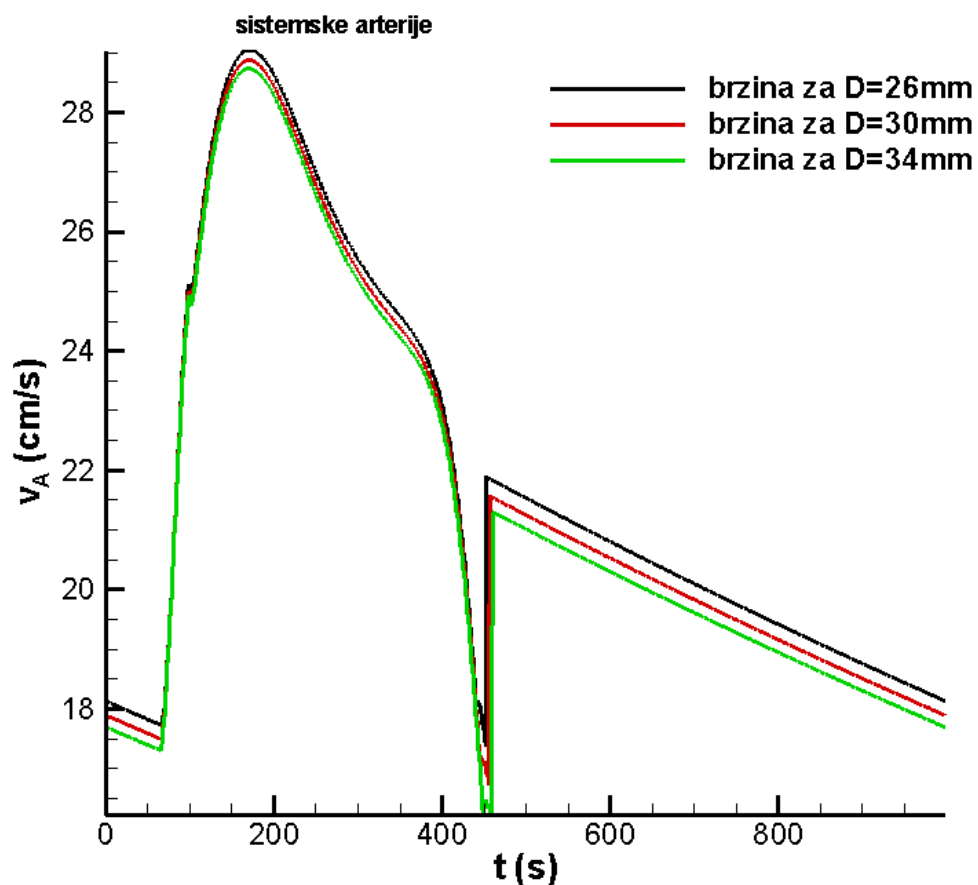


Slika 15. Promjena tlaka pri variranju promjera kuglice

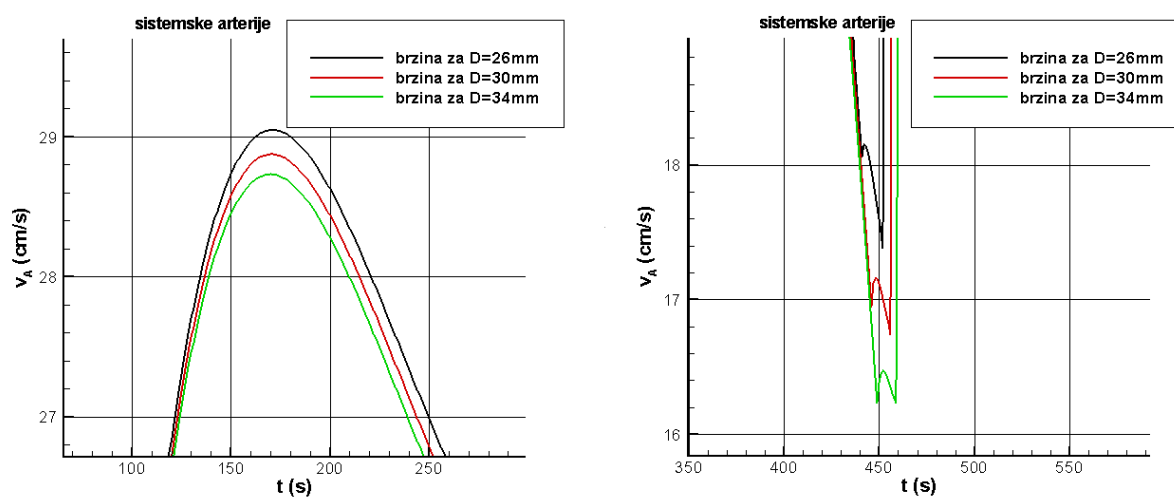


Slika 16. Detalji promjene tlaka pri variranju promjera kuglice

Sistolički i dijastolički tlak u sistemskim arterijama se sa povećanjem promjera kuglice smanjuju.

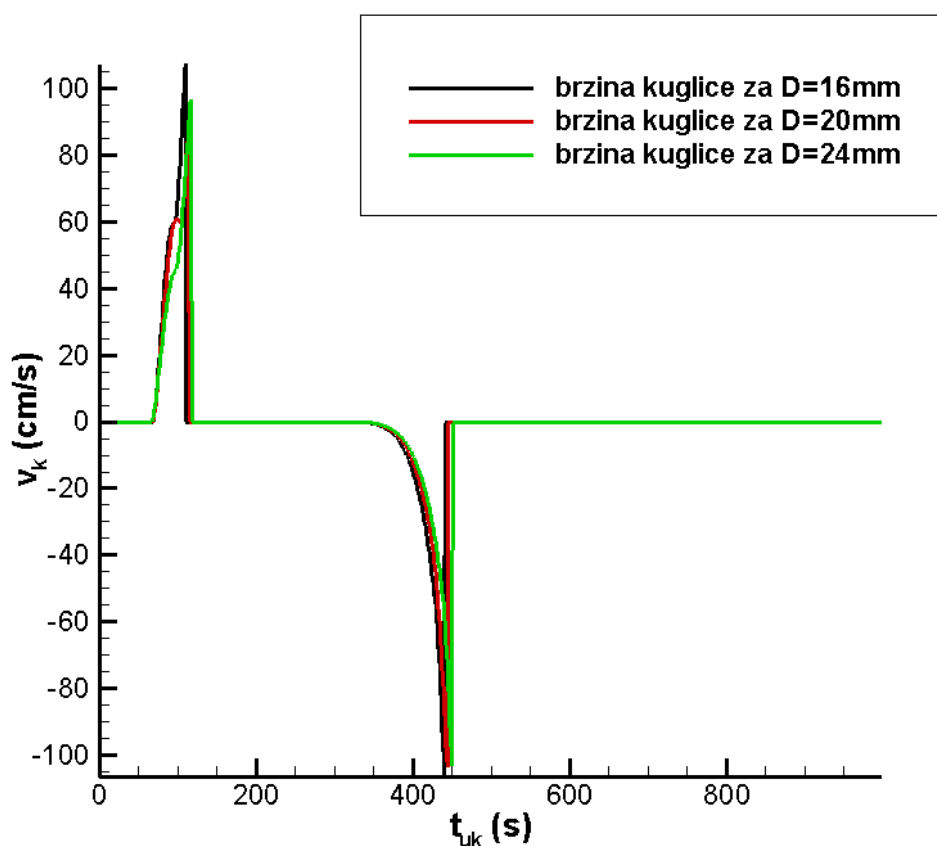


Slika 17. Promjena brzine strujanja krvi pri variranju promjera kuglice

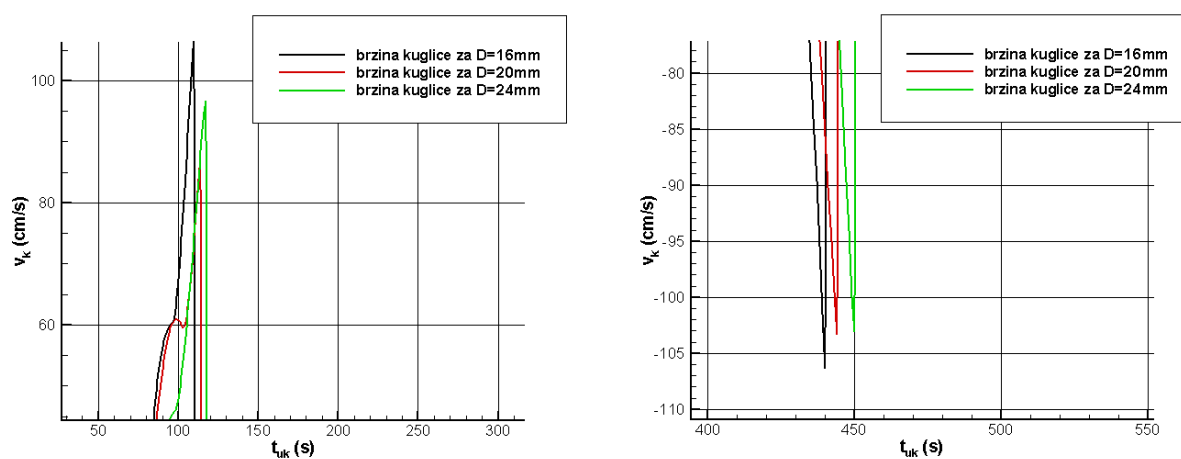


Slika 18. Detalji promjene brzine strujanja krvi pri variranju promjera kuglice

Brzina krvi koja protječe kroz aortni zalistak se smanjuje povećanjem promjera kuglice.



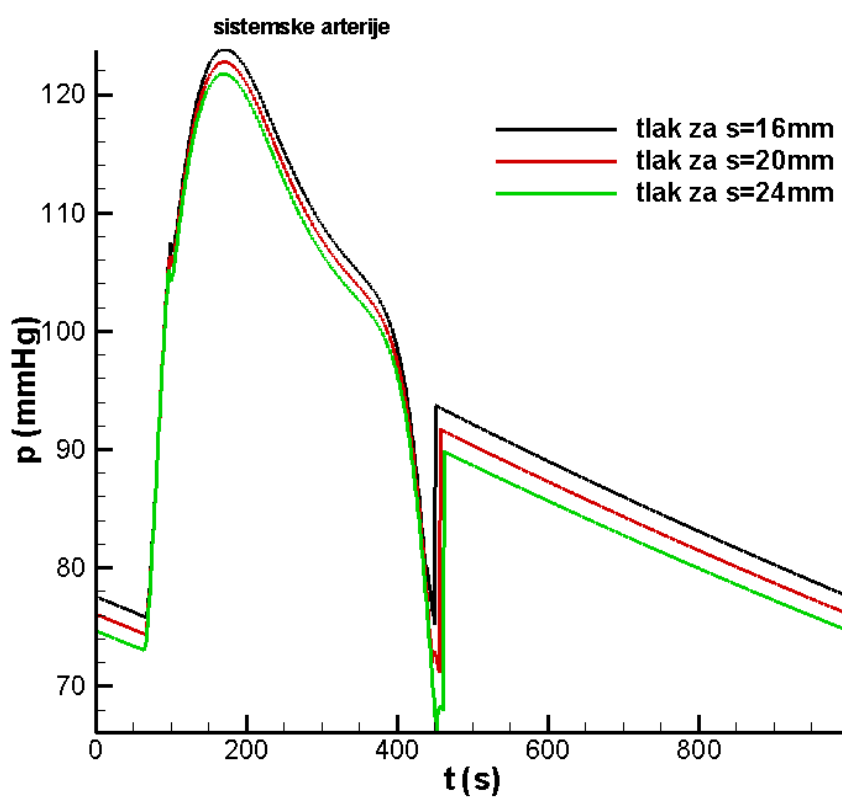
Slika 19. Promjena brzine kuglice pri variranju promjera kuglice



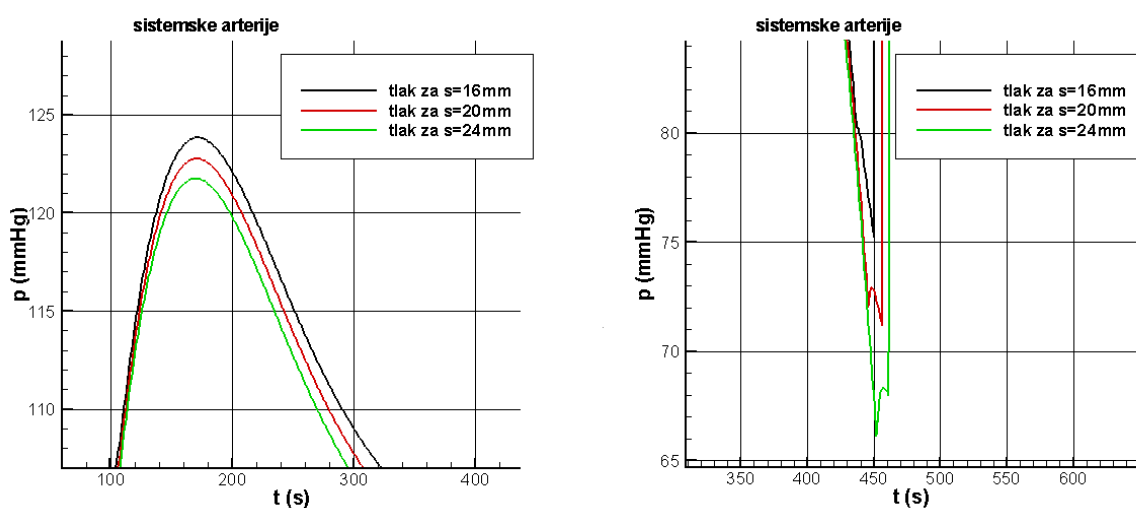
Slika 20. Detalji promjene brzine kuglice pri variranju promjera kuglice

Brzina kuglice se smanjuje s povećanjem promjera kuglice.

Nakon mijenjanja promjera kuglice, mijenjat ćemo duljinu puta za vrijednost od 4mm, dok promjer kuglice ostaje konstantan i iznosi 30mm.

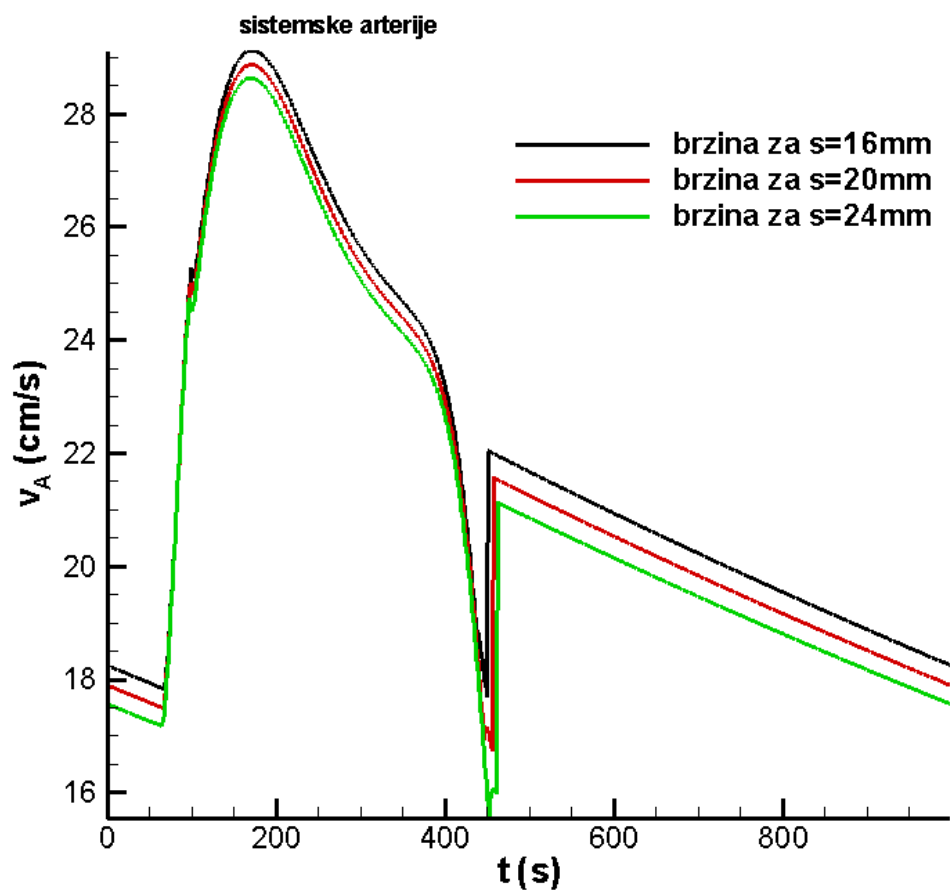


Slika 21. Promjena tlaka pri variranju duljine puta

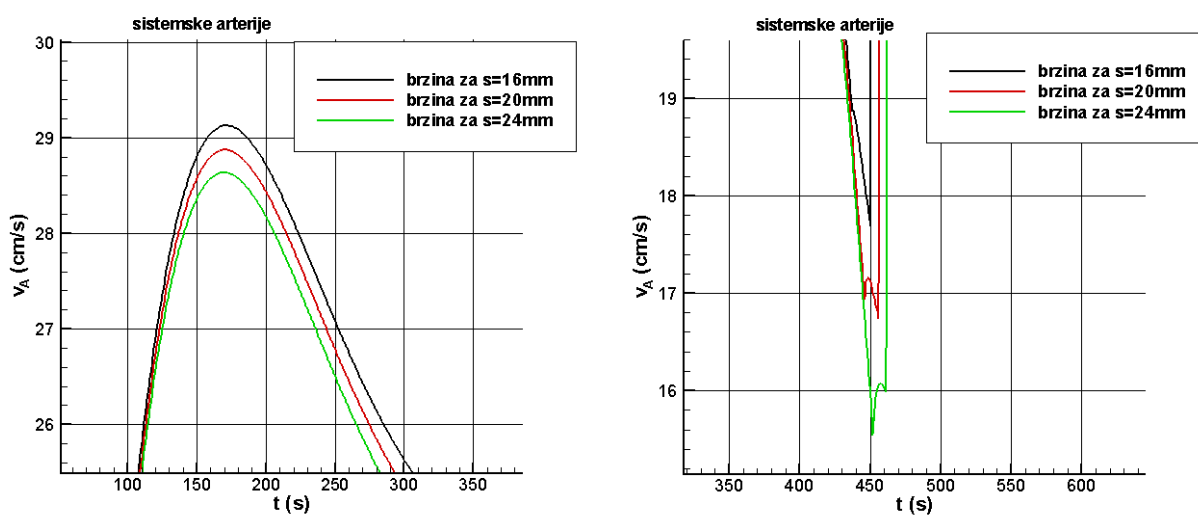


Slika 22. Detalji promjene tlaka pri variranju duljine puta

Sistolički i dijastolički tlak u sistemskim arterijama se sa povećanjem duljine puta smanjuju.

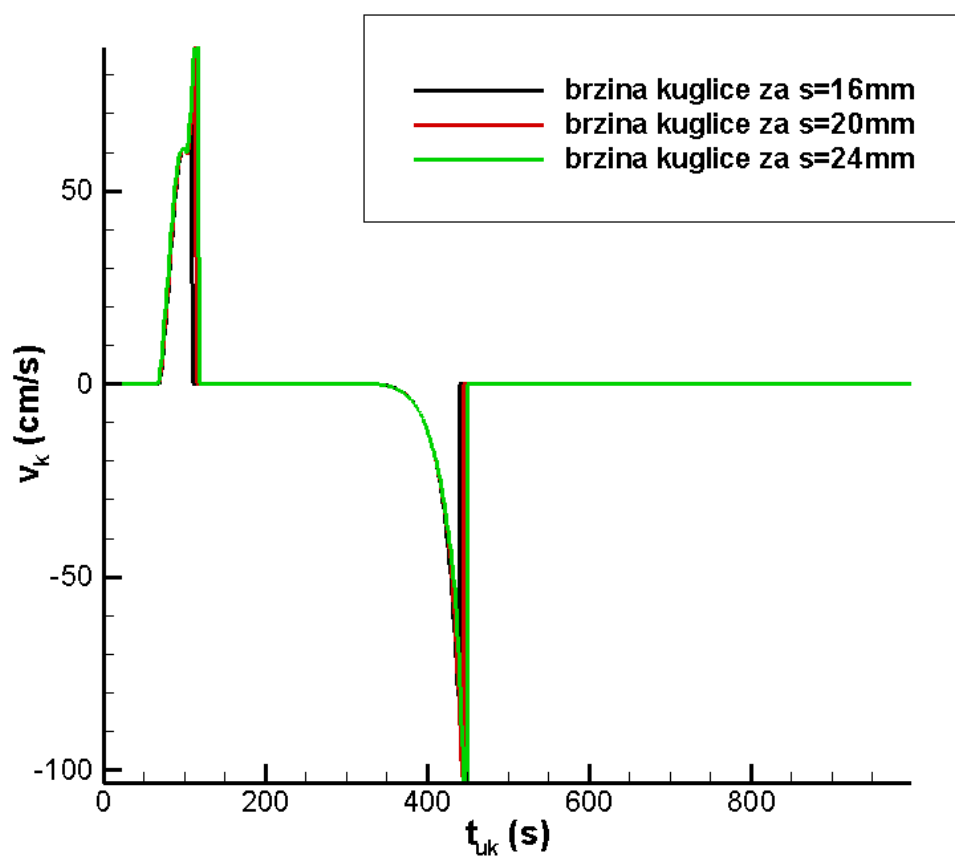


Slika 23. Promjena brzine strujanja krvi pri variranju duljine puta

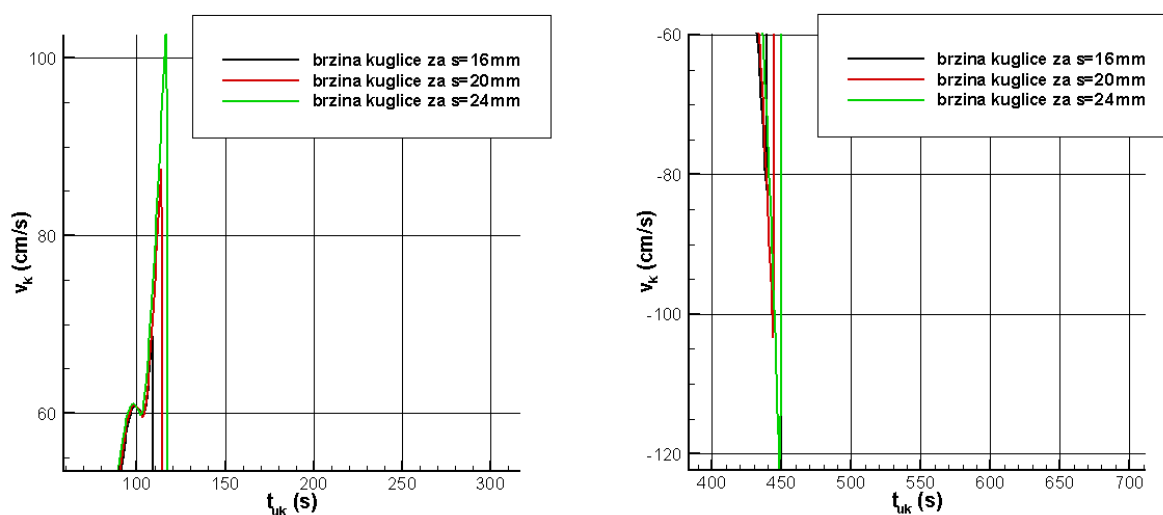


Slika 24. Detalji promjene brzine strujanja krvi pri variranju duljine puta

Brzina krvi koja protječe kroz aortni zalistak se smanjuje povećanjem duljine puta.



Slika 25. Promjena brzine kuglice pri variranju duljine puta



Slika 26. Detalji promjene brzine kuglice pri variranju duljine puta

Brzina kuglice se povećava s povećanjem duljine puta.

5. ZAKLJUČAK

U radu je matematički modeliran umjetni aortni ventil s kuglicom, čija je gustoća jednaka gustoći krvi. Razvijen je računalni program za rješavanje postavljenog matematičkog modela s koncentriranim parametrima. Izvršena je analiza utjecaja promjene parametara umjetnog ventila (masa, odnosno promjer D kuglice, te maksimalno mogući pomak kuglice, s_{\max}) na kliničke parametre (sistolički i dijastolički tlak, te udarni volumen). Također je analizirana maksimalne brzine kroz otvor aortnog ventila i kuglice. Glavni zaključci analize su sljedeći:

1) Povećavanjem promjera kuglice dolazi do:

- a) smanjenja sistoličkog i diastoličkog tlaka,
- b) smanjenja brzine strujanja krvi kroz otvor aortnog zalistka,
- c) smanjenja brzine kuglice.

2) Povećanjem maksimalno dopuštenog puta kuglice dolazi do:

- a) smanjenja sistoličkog i dijastoličkog tlaka,
- b) smanjenja brzine strujanja krvi kroz otvor aortnog zalistka,
- c) povećanja brzine kuglice.

LITERATURA

- [1] Frank H. Netter, Atlas of human anatomy, 2003.
- [2] Daniel E. Hoehn : The effect of shear stress magnitude on aortic valve inflammation, 2010.
- [3] Nikos Stergiopulos: Determinants of stroke volume and aortic pressure,
- [4] Kraut, B.: Strojarski priručnik, Tehnička knjiga Zagreb, 1970.

PRILOG:**Elastičnost:**

```
function [E1]=Elastance(t,alfa1,alfa2,n1,n2,T)
% .. potprogram za racunanje normalizirane elastičnosti
%   t = trenutno vrijeme
%   T = period (trajanje jednog otkucaja srca)
%   alfa1,alfa2,n1 i n2 su parametri modela
tim=t-fix(t/T)*T;
pom1=(tim/(alfa1*T))^n1;
pom2=(tim/(alfa2*T))^n2;
E1=pom1/(1+pom1)/(1+pom2);

end
```

Površina:

```
function [A,dAds]=Povrsina(s,smax,d,D)
% .. potprogram za racunanje površine otvora i derivacije površine po
%   pomaku u funkciji pomaka
%   s = pomak kuglice (s=0 je zatvoreni položaj)
%   smax = maksimalni pomak kuglice
%   d = promjer otvora aortnog zalistka
%   D = promjer kuglice (mora biti veci od promjera otvora)
%   A = površina otvora
%   dAds = derivacija dA/ds

if D <= d
    err='Promjer kuglice manji od promjera otvora';
end;

alfa=asin(d/D);
a=D*cos(alfa)/2;
xT=-(s+a);
yT=d/2;
beta=atan(0.5*d/(s+a));
xA=-D*cos(beta)/2;
yA=D*sin(beta)/2;
deltal=sqrt((xA-xT)^2+(yA-yT)^2);
r=(yT+yA)/2;
Ap=2*r*pi*deltal;

A=min(Ap,d^2*pi/4);

% dAdy_A = parcijalna derivacija površine A po yA
% dAdx_A = parcijalna derivacija površine A po xA
% dAdx_T = parcijalna derivacija površine A po xT
if s==0 % slučaj početnog položaja (malo ga prevarimo)
    s=1.e-10;
    xT=-(s+a);
    yT=d/2;
    beta=atan(0.5*d/(s+a));
    xA=-D*cos(beta)/2;
    yA=D*sin(beta)/2;
    deltal=sqrt((xA-xT)^2+(yA-yT)^2);
end
```

```

dAdy_A=pi*deltal+(yA+yT)*pi*(yA-yT)/deltal;
dy_Ads=-[d*D*cos(beta)^3]/(4*(a+s)^2);

dAdx_A=(yT+yA)*pi*(xA-xT)/deltal;
dx_Ads=-[d*D*sin(beta)*cos(beta)^2]/(4*(a+s)^2);

dAdx_T=-(yA+yT)*pi*(xA-xT)/deltal;
dx_Tds=-1;

dAds=dAdy_A*dy_Ads+dAdx_A*dx_Ads+dAdx_T*dx_Tds;
if A==d^2*pi/4
    dAds=0;
end

end

```

Glavni program:

```

% program za analizu strujanja kroz umjetni aortni ventil (kuglica u
% kavezu). U programu se analizida lijevi ventrikl (komora 1) i systemske
% arterije (komora 2). Promjena tlaka u lijevom ventriklu je definirana s
% pomoću vremenski promjenjive elastičnosti, a veza između volumena i
% tlaka u sistemskim arterijama je definirana viskoelastičnim modelom.
% Tlak u sistemskim venama jednak je nuli, a otpor sistemskih kapilara je
% konstantan (R).

clear all
clc

% inicijalizacija
B(1:5)=0; % polje varijabli
% B(1)=V1 = volumen lijevog ventrikla
% p1 = tlak lijevog ventrikla
% B(2)= Qav = protok kroz aortni ventil
% B(3)= V2 = volumen sistemskih arterija
% p2 = tlak u8 sistemskim arterijama
% B(4)= s =pomak kuglice
% B(5)= vk = Brzina kuglice
BC(1:5)=0; % derivacije varijabli u polju B

%... Zadani podatci
RHO=1050; % (kg/m**3) gustoca krvi i kuglice (sila težine
kuglice i uzgona se ne uzimaju u obzir)
mi=4.e-3; % Pa*s viskoznost krvi
T=1; % (s) trajanje takta
%alfa1=0.303; % parametar za funkciju koja opisuje vremenski
promjenjivu elastičnost
alfa1=0.25; % parametar za funkciju koja opisuje vremenski
promjenjivu elastičnost
%alfa2=0.508; % parametar za funkciju koja opisuje vremenski
promjenjivu elastičnost
alfa2=0.45; % parametar za funkciju koja opisuje vremenski
promjenjivu elastičnost
n1=1.32; % parametar za funkciju koja opisuje vremenski
promjenjivu elastičnost
n2=21.9; % parametar za funkciju koja opisuje vremenski
promjenjivu elastičnost
% odredjivanje faktora s kojim treba mnoziti elastičnost da maksimalna

```



```

% vrijednost bude jednaka jedan
t=[0:0.005:T];
E=[0:0.005:T];
emax=0;
for i=1:201
    [E(i)]=Elastance(t(i),alfa1,alfa2,n1,n2,T);
    emax=max(emax,E(i));
end
factor=1/emax; % faktor kojim treba mnoziti bezdimenzijsku elasticnost
% crtanje bezdimenzijske elastičnosti lijevog ventrikla
figure (1)
plot(t,E*factor)
grid on
legend('E')

DT=1.e-3; % (s) korak integracije
MTAKT=30; % broj taktova integracije
KOR=10; % korak ispisa rezultata
NTAKT= round(T/DT); % okrugli broj koraka u taktu
DT=T/NTAKT; % korigirani korak integracije

Emax=2.75e6; %E (mmHg/m**3) elastance sistole lijevog
ventrikla
Emin=0.0391e6; %E (mmHg/m**3) elastance diastole lijevog
ventrikla
E2=0.5e6; %E (mmHg/m**3) elastance sistemskih arterija pri
V=V0
V01=10.e-6; %V01 (m**3) ravnotezni volumen lijevog ventrikla
V02=300.e-6; %V02 (m**3) ravnotezni volumen sistemskih
arterija
Eta=130.e5; % (kg/(s*m**4)) koeficijent otpora stijenke
SISTEMSKIH ARTERIJA

%... Aortni ventil
d=2.e-2; % Promjer otvora aortnog ventila, m
A=d^2*pi/4; % A (m**2) površina otvorenog AORTNOG ZALISKA
L=1.5e-2; % L (m) duljina stupca za inertance
aortnog zaliska
M=RHO*L/A; % Koeficijent inercije za strujanje kroz
aortni ventil
K=1; % K (-) koeficijent otpora aortnog zalistka
(mjesni otpor)
D=3.e-2; % Promjer kuglice, m
smax=35.e-3; % Maksimalni pomak kuglice, m
R=1800.e5; % (kg/(s*m**4))otpor kapilara

PCONV=133; %faktor pretvorbe jedinica za tlak iz mmHg u
Pa
%... Konverzija mjernih brojeva u SI sustav
Emax=Emax*PCONV;
Emin=Emin*PCONV;
E2=E2*PCONV;

%... Pocetni uvjeti - polje B sadrzi brzine (1:8), tlakove(9:16) i
volumene(17:24)
B(1:5)=0;
BC(1:5)=0;

```

```

time=0;
TLT=(time-fix(time/T)*T); % lokalno vrijeme (0,T)
% B(1)=V1 = volumen lijevog ventrikla
% p1 = tlak lijevog ventrikla
% B(2)=Qav = protok kroz aortni ventil
% B(3)=V2 = volumen sistemskih arterija
% p2 = tlak u8 sistemskim arterijama
% B(4)=s =pomak kuglice
% B(5)=vk = Brzina kuglice
%... Zadavanje pocetnih volumena
Vlpoc=120.e-6;
B(1)=Vlpoc; % (m**3) pocetni volumen lijevog ventricla
B(3)=480.e-6; % (m**3) pocetni volumen sistemski arterija
B(2)=0; % aortni ventil je zatvoren
B(4)=0; % Kuglica zatvara otvor
B(5)=0; % kuglica miruje u zatvorenom položaju

% Izracunavanje pocetnih tlakova
p1=(Emax*factor*Elastance(time,alfa1,alfa2,n1,n2,T)+Emin)*(B(1)-V01); %
POCETNI TLAK U LIJEVOM VENTRICLU
BC(3)=(R*B(2)-E2*(B(3)-V02))/(R+Eta);
p2=E2*(B(3)-V02)+Eta*BC(3);

NT=NTAKT*MTAKT/KOR+1; % broj vremenskih koraka za integraciju

%... Ispis zaglavlja datoteka za crtanje
FILE(1:2)={'SVE_LV.PLT' 'SVE_SA.PLT'};
for I=1:2 % rezultati za sve taktove
fid1(I) = fopen(FILE{I},'w');
fprintf(fid1(I),'VARIABLES = "tuk","p","v","Vol","t","I"\n');
fprintf(fid1(I),'ZONE I=%i, F=POINT\n',NT);
end
TL=time;
I=1; % lijevi ventrikla
fprintf(fid1(I),'%e %e %e %e %e
%i\n',time,p1/PCONV,4*B(2)/(d^2*pi)*100.,B(1)*1.E6,TL,I);
I=2; % sistemske arterije
fprintf(fid1(I),'%e %e %e %e %e
%i\n',time,p2/PCONV,4*(p2/R)/(d^2*pi)*100.,B(3)*1.E6,TL,I);

FIL(1:3)={'LV.PLT' 'SA.PLT' 'PROTOCI.PLT'};
for I=1:2 % rezultati za zadnji takt
fid2(I) = fopen(FIL{I},'w');
fprintf(fid2(I),'TITLE = "Rezultati zadnji takt"\n');
fprintf(fid2(I),'VARIABLES = "t","p","v","Vol","tuk","I"\n');
fprintf(fid2(I),'ZONE I=%i, F=POINT\n',NTAKT+1);
end
I=3;
fid2(I) = fopen(FIL{I},'w');
fprintf(fid2(I),'TITLE = "Volumeni protekli kroz spojeve"\n');
fprintf(fid2(I),'VARIABLES = "t","V1","V2","tuk"\n');
fprintf(fid2(I),'ZONE I=%i, F=POINT\n',MTAKT);

% ZAVRSIO S UCITAVANJEM PODATAKA I PRELIMINARNIM ISPISIMA
%... Pocetak integracije
for J=1:NTAKT*MTAKT

if mod(J,NTAKT)==1
QDT(1:2)=0;

```

```

end

%time=(J-1)*DT;
JJ=(J-1)/NTAKT+1;
IS=0;

%... Sacuvaj stare vrijednosti varijabli
for I=1:5
    BO(I)=B(I);
end

for LL=1:4 %-----Runge-Kutta procedura
%     B(1)=V1 = volumen lijevog ventrikla
%     p1 = tlak lijevog ventrikla
%     B(2)= Qav = protok kroz aortni ventil
%     B(3)= V2 = volumen sistemskih arterija
%     p2 = tlak u8 sistemskim arterijama
%     B(4)= s =pomak kuglice
%     B(5)= vk = Brzina kuglice
BC(1)=-B(2);
TLT=(time-fix(time/T)*T); % lokalno vrijeme (0,T)
if (TLT/T>0.6) & (TLT<T)
    BC(1)=(Vlpoc-B(1))/(T-TLT);
end
if B(1)>Vlpoc
    B(1)=Vlpoc;
end
p1=(Emax*factor*Elastance(time,alfa1,alfa2,n1,n2,T)+Emin)*(B(1)-V01); %
TLAK U LIJEVOM VENTRICLU
BC(3)=(R*B(2)-E2*(B(3)-V02))/(R+Eta);
p2=E2*(B(3)-V02)+Eta*BC(3);
[Ao,dAds]=Povrsina(B(4),smax,d,D); % Funkcija vraca površinu A i dA/ds
va=0;
if Ao>0
    va=B(2)/Ao;
end
BC(2)=(p1-p2-RHO*K/2*va^2+M*va*B(5)*dAds)/M;
if (B(4)<=1.e-17) & (BC(2)<0)
    B(2)=0;
    BC(2)=0;
end
BC(4)=B(5);
if (B(4)<=1.e-17) & (BC(4)<0)
    B(4)=0;
    BC(4)=0;
end
if (B(4)>=smax) & (BC(4)>0)
    B(4)=smax;
    BC(4)=0;
end
BC(5)=(p1-p2)*D^2*pi/4+3*pi*D*mi*(B(5)-4*B(2)/(d^2*pi));
if (B(4)<=1.e-17) & (BC(4)<=0)
    B(5)=0;
    BC(5)=0;
end
if (B(4)>=smax) & (BC(4)>=0)
    B(5)=0;
    BC(5)=0;
end
end
% Runge Kutta metoda

```

```

IS=IS+1;
% FIRST ENTRY
if IS == 1
    E=time;
    for I=1:5
        I1=4*I-3;
        F(I)=B(I);
        G(I1)=BC(I)*DT;
        B(I)=F(I)+0.5*G(I1);
    end
    time=E+0.5*DT;
% SECOND ENTRY
elseif IS == 2
    for I=1:5
        I2=4*I-2;
        G(I2)=BC(I)*DT;
        B(I)=F(I)+0.5*G(I2);
    end
    time=E+0.5*DT;
% THIRD ENTRY
elseif IS == 3
    for I=1:5
        I3=4*I-1;
        G(I3)=BC(I)*DT;
        B(I)=F(I)+G(I3);
    end
    time=E+DT;
% FOURTH ENTRY
elseif IS == 4
    for I=1:5
        I4=4*I;
        I1=I4-3;
        I2=I4-2;
        I3=I4-1;
        G(I4)=BC(I)*DT;
        B(I)=G(I1)+2*(G(I2)+G(I3));
        B(I)=(B(I)+G(I4))/6+F(I);
    end
    IS=0;
end
end %kraj petlje po LL

QDT(1)=QDT(1)+B(2)*DT; % volumen krvi koji protece u jednom taktu kroz
aortni ventil
QDT(2)=QDT(2)+(p2/R)*DT; % volumen krvi koji protece u jednom taktu
kroz kapilare

if mod(J,NTAKT)== 0
    fprintf('PROTOCI U OTKUCAJU BR. ,%i\n',JJ);
    fprintf('%e %e \n',QDT(1:2));
    fprintf(' ');
    fprintf(fid2(3), '%e %e %e\n',time*1.e3,QDT(1:2)*1.e6,TL);
    QDT(1:2)=0;
end

if mod(J,KOR) == 0 %pisi u sve
    TL=(time-fix(time/T)*T)*1.e3;
    I=1; % lijevi ventrikl
    fprintf(fid1(I), '%e %e %e %e %e
%i\n',time,p1/PCONV,4*B(2)/(d^2*pi)*100.,B(1)*1.E6,TL,I);
    I=2; % sistemske arterije

```

```
fprintf(fid1(I), '%e %e %e %e %e
%i\n', time, p2/PCONV, 4*(p2/R)/(d^2*pi)*100., B(3)*1.E6, TL, I);
end

if J >= (MTAKT-1)*NTAKT    %pisi u zadnji takt
    TL=(time-fix(time/T)*T)*1.e3;
    I=1;    % lijevi ventrikl
    fprintf(fid2(I), '%e %e %e %e %e
%i\n', time*1.e3, p1/PCONV, 4*B(2)/(d^2*pi)*100., B(1)*1.E6, TL, I);
    I=2;    % systemske arterije
    fprintf(fid2(I), '%e %e %e %e %e
%i\n', time*1.e3, p2/PCONV, 4*(p2/R)/(d^2*pi)*100., B(3)*1.E6, TL, I);
end

end    %kraj J petlje - integracije po vremenu
```